Teilchenphysik I

Übung 10: Die Dirac-Gleichung, Quantenchromodynamik

1 Anwesenheitsaufgaben

1.1 Die Dirac-Gleichung

Wir wollen von dem relativistischen Energiesatz $E^2 = p^2 + m^2$eine entsprechende quantenfeldtheoretische Bewegungsgleichung herleiten. Die Klein-Gordon-Gleichung führt zu Lösungen, die negative Wahrscheinlichkeitsdichten haben, weil sie zweiter Ordnung in der Zeit t ist. Um den Energiesatz zu faktorisieren, machen wir den Ansatz

$$p^\mu p_\mu - m^2 = (\beta^\kappa p_\kappa + m)(\gamma^\lambda p_\lambda - m)$$

wo β^κ und γ^λ Faktoren bezeichnen, die noch zu bestimmen sind. Leiten Sie die Antikommutatorbeziehungen der β^κ und γ^λ ab. Mit diesen Faktoren und der Korrespondenz

$$\vec{p} \to \tfrac{1}{i}\nabla \qquad E \to i\tfrac{\partial}{\partial t}$$

erhält man die Dirac-Gleichung:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

wobei die γ 4×4 Matrizen sind, die die folgende Antikommutatorbeziehungen erfüllen:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

wobei die σ^i die Pauli-Spinmatrizen sind:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.2 Drehimpulserhaltung mit Spinoren

Wir werden mit dieser Aufgabe zeigen, dass Lösungen der Dirac-Gleichung sowohl intrinsischen Spin ($\vec{S}$) als auch Bahndrehimpuls ($\vec{L}$) haben, und dass die *Summe* ($\vec{S} + \vec{L}$) erhalten ist.

1. Schreiben Sie den Hamilton-Operator für die Dirac-Gleichung, indem sie die Gleichung nach p_0 auflösen. Das Ergebnis lautet $H = \gamma^0(\gamma^i \cdot p^i + m)$, wobei $1 \leq i \leq 3$ und $\vec{p} \equiv \frac{1}{i}\nabla$.

2. Berechnen Sie das Kommutator von H mit dem Bahndrehimpulsoperator $\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$. (Ergebnis: $[H, \vec{L}] = -i\gamma^0\vec{\gamma} \times \vec{p}$.) Da es nicht null ist, schliessen wir daraus, daß der Bahndrehimpuls allein nicht erhalten ist.

3. Berechnen Sie nun das Kommutator von H mit dem Spindrehimpulsoperator:

$$\vec{S} \equiv \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}.$$

Da die Summe der Ergebnisse aus 2) und 3) null ist, haben wir die Erhaltung des Gesamtdrehimpulses bewiesen.

1.3 Diagramme für Quark-Quark-Streuung

Wir betrachten $p - \bar{p}-$Wechselwirkungen, und wollen die Beiträge der verschiedenen zugrunde liegenden fundamentalen Feynman Graphen vergleichen. (Wir vergessen nicht, dass Konstituenten außer den Valenz-Quarks auch teilnehmen.) Die Annahme der asymptotischen Freiheit bedeutet, dass wir die wechselwirkenden Quarks und Gluonen als freie Teilchen betrachten können.

1. Zeichnen Sie die Diagramme aller möglichen Streuprozesse, die in niedrigster Ordnung QCD vorkommen können.

2. Zu welchen dieser Diagramme existieren analoge QED-Diagramme?

2 Hausaufgaben

2.1 Gamma-Matrizen

Zeigen Sie, dass die in der Aufgabe 1.1 angegebene Gamma-Matrizen die Antikommutatorbeziehungen in der Anwesenheitsaufgabe 1 erfüllen (3 Punkte).

2.2 Ortsunabhängige Spinoren

Wir lösen die Dirac-Gleichung im Spezialfall, wo die Lösung $\psi(t)$ keine Ortsabhängigkeit hat.

$$\tfrac{\partial\psi}{\partial x} = \tfrac{\partial\psi}{\partial y} = \tfrac{\partial\psi}{\partial z} = 0.$$

Die Korrespondenz

$$\vec{p} \to \tfrac{1}{i}\nabla \qquad E \to i\tfrac{\partial}{\partial t}$$

zeigt uns, dass diese Bedingung verlangt, dass der Impuls von ψ Null sei. Zeigen Sie, dass diese Lösungen der Dirac-Gleichung (d.h. die Dirac-Spinoren) sich folgendermassen schreiben lassen: (2 Punkte)

$$\psi^{(1)} = e^{-imt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \psi^{(2)} = e^{-imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi^{(3)} = e^{+imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \psi^{(4)} = e^{+imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\psi^{(1)}$ und $\psi^{(2)}$ beschreiben die beiden Spinzustände von Elektronen. $\psi^{(3)}$ und $\psi^{(4)}$ beschreiben die beiden Spinzustände von Positronen.

2.3 Die Parität von Spinoren

Die Paritätstransformation für Dirac-Spinoren ist $\psi \to \psi' = \gamma^0\psi$. Zeigen Sie, dass die oben gefundenen Lösungen der Dirac-Gleichung für ruhende Fermionen Eigenzustände der Parität sind. Was kann man über die relative Parität von Teilchen und Antiteilchen daraus entnehmen? (1 Punkt)

2.4 Die laufende Kopplungskonstante in QED und QCD

Die Renormierung einer Feldtheorie führt zwangsläufig zu einer Energieskalenabhängigkeit der Kopplungskonstante.

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(Q_0^2)}{1+b \cdot log(Q^2/Q_0^2)}$$

$QED : b = \frac{-\alpha(Q_0^2)}{3\pi}, Q_0 = m_e$ $QCD : b = \frac{\alpha(Q_0^2)}{12\pi}(33 - 2 \cdot N_f), Q_0 = \Lambda \simeq 300$ MeV

Wobei N_f der Anzahl des Flavours, die ueber gegebene Q^2 produziert werden können, ist.

1. Berechnen Sie die relative Änderung der Kopplungskonstante für die folgenden Fälle (2 Punkte):

   - QED: $Q^2 = m_e^2$ $(\alpha(m_e^2) = 1/137)$ $\to$ $Q^2 = {m_Z}^2$
   - QCD: $Q^2 = m^2_{\Upsilon(4S)}$ $(\alpha(m^2_{\Upsilon(4S)}) = 0.18)$ $\to$ $Q^2 = {m_Z}^2$

   Wobei $m_{\Upsilon(4S)}$ die Masse des Υ(4S) Mesons ist ($b\bar{b}$ Meson, $m_{\Upsilon(4S)}$=10.58 GeV)
   (Tip: Sie können die relative Änderung von α^{-1} berechnen)

2. In der vorhergehenden Berechnung mussen Sie N_f=5 verwenden. Wieso ? (1 Punkt)

3. Diskutieren Sie die Bedeutung der unterschiedlichen Vorzeichen des Parameters b für QED und QCD (1 Punkt).