Teilchenphysik I

Übung 7: Isospin und Hyperladung

1 Anwesenheitsaufgaben

1.1 Isospin

Das Proton p und das Neutron n sind fast gleich schwer und verhalten sich unter der starken Kernkraft in vielerlei Hinsicht gleich. Ähnliches gilt für die Pionen $\pi^+\pi^0\pi^-$. Betrachtet man beispielsweise die folgenden Reaktionen in der Pion-Streuung am Deuteron d

$$\begin{aligned} \pi^+ + d &\rightarrow p + p && (1)\\ \pi^0 + d &\rightarrow p + n && (2)\\ \pi^- + d &\rightarrow n + n, && (3) \end{aligned}$$

so findet man, daß $\sigma_{\pi^+ d\to pp} = \sigma_{\pi^- d\to nn}$. Es liegt also nahe, im Rahmen der starken Kernkraft das Proton und das Neutron als zwei Zustände eines Teilchens, des Nukleons N, aufzufassen und entsprechend auch die drei Pionen als drei verschiedene Zustände eines Teilchens anzusehen. Völlig ladungsunabhängig ist die starke Kernkraft jedoch auch nicht, denn man findet z.B. $\sigma_{\pi^0 d\to pn} = \frac{1}{2}\sigma_{\pi^+ d\to pp}$. Und während das Deuteron ein pn-Bindungszustand ist, gibt es kein gebundenes System aus pp oder nn. Eine einfache additive Quantenzahl zur Unterscheidung der verschiedenen Zustände reicht also nicht aus.

Im Isospin-Formalismus werden die verschiedenen Zustände des Nukleons (Pions) als Einstellungen eines postulierten Spin-ähnlichen Freiheitsgrades beschrieben, eben des Isospins.

- Welche Isospin-Quantenzahlen werden dem Nukleon-Dublett und dem Pion-Triplett zugeordnet, welche dem Deuteron?
- Welche quantenmechanischen Operatoren erzeugen die Übergänge zwischen den Mitgliedern eines Multipletts? Zeigen sie dies explizit am Beispiel des Dubletts.

Anstelle einer (nicht erfüllten) vollständigen Ladungsinvarianz der starken Kernkraft fordern wir nun Isospin-Invarianz, d.h. unter Drehungen im Isospin-Raum soll die Wirkung der starken Kernkraft gleich bleiben. Anders ausgedrückt: der Operator der starken Kernkraft soll mit diesen Drehungen vertauschen. Diese Drehungen bilden eine Gruppe, die Gruppe der speziellen unitären Transformationen in zwei Dimensionen, $SU(2)$. Die Multipletts bezeichnet man als Darstellungen dieser Gruppe ($SU(2)$-Multipletts). Dies sollte Ihnen im Fall des Dubletts (fundamentale Darstellung) geläufig sein, auf der die Generatoren der $SU(2)$ gerade die Pauli-Matrizen sind.

Wenn man Reaktionen von zwei Teilchen betrachtet, oder auch Teilchen, die aus anderen Teilchen aufgebaut sind, handelt es sich dabei um kombinierte Darstellungen (oder auch Produkt-Darstellungen). Auch das ist Ihnen aus der Quantenmechanik bekannt.

- Wie lauten die Eigenzustände der Operatoren $\vec{I}^2$ und I_3 eines Systems aus zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen, wenn $\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2$ ist?

Diese kombinierte Darstellung zerfällt in sog. irreduzible Darstellungen, die sich dadurch auszeichnen, daß sie durch die Generatoren der Gruppe aus einem beliebigen ihrer Mitglieder erzeugt werden. Für das Beispiel schreibt man die Kombination und Zerlegung als

$$2 \otimes 2 = 3_S \oplus 1_A. \tag{4}$$

- Besprechen Sie diese Schreibweise.

Für die Isospin wird nun genauso vorgegangen.

- Geben Sie die vier Isospin-Zustände eines Nukleon-Nukleon-Systems an.
- In welchem Isospin-Zustand befinden sich die Pion-Deuteron-Systeme in Gl. (1)-(3)?
- Berechnen Sie die Verhältnisse der Wirkungsquerschnitte der Reaktionen (1)-(3).
- Wie folgt aus der Isospin-Invarianz die Gleichheit der Massen innerhalb eines Multipletts?
- Ist die Isospin-Invarianz für alle Wechselwirkungen erfüllt?

1.2 Hyperladung

Die $SU(2)$-Beschreibung des Isospins wurde unzureichend, als "seltsame" Teilchen entdeckt wurden, deren lange Lebensdauer nur dadurch erklärbar war, daß ein neuer Erhaltungssatz den starken Zerfall verbot und diese Teilchen nur schwach zerfallen konnten. Diese Erhaltungsgröße wurde *strangeness* genannt:

$$S = 0 \quad : \quad \pi, N, \Delta, \eta, \eta' \tag{5}$$
$$S = +1 \quad : \quad K^+, K^0 \tag{6}$$
$$S = -1 \quad : \quad \Lambda, \Sigma, K^-, \overline{K^0}. \tag{7}$$

Statt der Strangeness wird oft die Hyperladung $Y \equiv B + S$ verwendet, wobei B die Baryonenzahl ist.

- Zeichnen die die pseudoskalaren Mesonen in ein I_3-Y-Diagramm ein.

Diese Mesonen setzen sich aus u-, d- und s-Quarks zusammen.

- Leiten sie daraus Isospin und Hyperladung dieser Quarks ab und zeichnen Sie u,d,s sowie $\bar{u}$,$\bar{d}$,$\bar{s}$ in ein I_3-Y-Diagramm ein.

Die $SU(2)$ des Isospins und die $U(1)$ der Hyperladung können in einer $SU(3)_{flavour}$ zusammengefaßt werden, deren fundamentale Darstellungen "3" und "$\bar{3}$" die uds und $\bar{u}\bar{d}\bar{s}$-Tripletts sind, die Sie gerade gezeichnet haben.

- Konstruieren Sie (graphisch) aus diesen das Nonet der pseudoskalaren Mesonen.

Man kann zeigen, daß $3 \otimes 3 = 8 \oplus 1_S$ ist. Die Tatsache, daß sich alle beobachteten Teilchen in solchen Multipletts einordnen lassen und andererseits alle Positionen darin auch mit Teilchen besetzt sind, war das entscheidende Indiz für das Quark-Modell.

- Zeigen Sie, daß die Gell-Mann-Nishijima-Relation

$$Q = I_3 + \frac{1}{2} Y \tag{8}$$

  für die Quarks erfüllt ist.

Da alle Quantenzahlen in dieser Gleichung additiv sind, ist die Gell-Mann-Nishijima-Relation im Quark-Modell also trivial.

2 Hausaufgaben

2.1 Isospin in der Pion-Nukleon-Streuung (5 Punkte)

Die $\Delta(1232)$-Resonanz tritt in vier Ladungszuständen $\Delta^{++}, \Delta^{+}, \Delta^{0}, \Delta^{-}$ auf. Ihr wird daher ein Isospin von 3/2 zugeordnet. Alle diese Zustände zerfallen fast ausschließlich in ein Pion und ein Nukleon.

- Geben Sie alle Zerfallskanäle dieser Art an.
- Bestimmen Sie mithilfe des Isospin-Formalismus die zugehörigen Verzweigungsverhältnisse.

Betrachten Sie nun Pion-Nukleon-Streuung mit Erzeugung eines resonanten $I = 3/2$-Zwischenzustandes. (Tatsächlich ist dies im Bereich der $\Delta(1232)$-Resonanz der dominierende Beitrag zum
Wirkungsquerschnitt.)

- Zeigen Sie unter Verwendung der Isospin-Erhaltung in der starken Kernkraft, daß

$$\sigma_{\pi^+ p \to \pi^+ p} : \sigma_{\pi^- p \to \pi^- p} : \sigma_{\pi^- p \to \pi^0 n} = 1 : 1/9 : 2/9. \tag{9}$$

Die benötigten Clebsch-Gordan-Koeffizienten können Sie der folgenden Tabelle entnehmen.

2.2 Die anomalen magnetischen Momente der Nukleonen (5 Punkte)

Die Flavour-Spin-Wellenfunktion des Protons ist gegeben durch

$$|p \uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} \left| u \uparrow u \downarrow d \uparrow + u \downarrow u \uparrow d \uparrow - 2u \uparrow u \uparrow d \downarrow + Perm(udu) + Perm(duu) \right\rangle . \tag{10}$$

- Stellen Sie die Flavour-Spin-Wellenfunktion $|n\uparrow\rangle$ des Neutrons auf.

Nehmen Sie an, die magnetischen Momente der Nukleonen ergäben sich aus der Wellenfunktion als Erwartungswerte des Operators $\hat{\mu}_N = \sum \hat{\mu}_q$, wobei $\hat{\mu}_q$ die Operatoren der magnetischen Momente der Quarks sind und die Summe über alle im Nukleon anwesenden Quarks läuft. Bedenken Sie, daß $\hat{\mu}_q$ spinabhängig ist.

- Zeigen Sie, daß

$$\mu_p = \tfrac{1}{3}(4\mu_u - \mu_d) \tag{11}$$

$$\mu_n = \tfrac{1}{3}(4\mu_d - \mu_u). \tag{12}$$

Rufen Sie sich in Erinnerung zurück, daß das magnetische Moment eines punktförmigen Fermions f gegeben ist durch $\mu_f = Q_f/2m$, wobei Q_f die Ladung des Fermions ist.

- Welches Verhältnis μ_n/μ_p ergibt sich, wenn u- und d-Quark die gleiche Masse haben? Wie vergleicht sich dieses Ergebnis mit dem Meßwert $\mu_n/\mu_p = -(0.68497945 \pm 0.00000058)$?