Übungen zur Einführung in die Theoretische Physik (Rose/Hoffstätter)

22.4.1997, Übungsblatt Nr. 1

Aufgabe 1) Berechnen Sie den Gradienten der folgenden Funktionen von $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$f_1(r) = ar + b,\ \ f_2(r) = ar^2,\ \ f_3(r) = a/r,\ \ f_4(r) = g(r).$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\partial_x r &= \frac{x}{r}\ ,\quad \partial_y r = \frac{y}{r}\ ,\quad \partial_z r = \frac{z}{r}\ ,\\
\vec{\nabla} f_4(r) &= \vec{\nabla} g(r) = \frac{\vec{r}}{r} g'(r)\ ,\\
\vec{\nabla} f_1(r) &= a\frac{\vec{r}}{r}\ ,\\
\vec{\nabla} f_2(r) &= 2a\vec{r}\ ,\\
\vec{\nabla} f_3(r) &= -a\frac{\vec{r}}{r^3}\ .
\end{aligned}$$

Aufgabe 2) Berechnen Sie die Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}(r)$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{r} &= \partial_x x + \partial_y y + \partial_z z = 3\ ,\\
\vec{\nabla} \cdot \vec{f}(r) &= \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{f}'(r)\ .
\end{aligned}$$

Aufgabe 3) Berechnen Sie die Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{f}(r)$ und $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} g(r))$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{f}(r) &= \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{f}'(r)\ ,\\
\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} g(r)) &= 0\ .
\end{aligned}$$

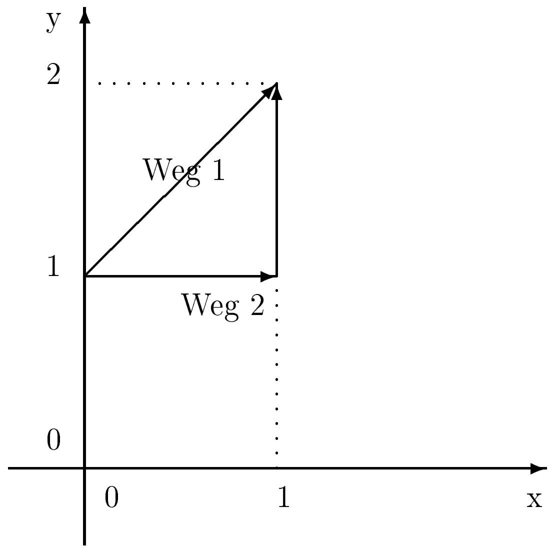
Aufgabe 4) Formen Sie den Ausdruck $\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B})$ um, so daß kein Kreuzprodukt auftritt.

Lösung: Wir wenden die Produktregel and und kennzeichnen Funktionen, die nicht abgeleitet werden sollen, durch Unterstreichen.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) &= \vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\underline{\vec{B}})+\vec{\nabla}\times(\underline{\vec{A}}\times\vec{B})\\ &= (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}-\vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})+\vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})-(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}\ .\end{aligned}$$

Aufgabe 5) Für die folgenden Vektorfunktionen vergleiche man die Wegintegrale $\int_{p_0}^{p_1}\vec{v}\cdot\vec{ds}$ entlang den Wegen 1 und 2, welche der Funktionen läßt sich als Gradient einer skalaren Funktion schreiben. Wie lautet diese skalare Funktion?

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= (x+y)\vec{e}_x+x\vec{e}_y\\ \vec{v}_2 &= xy\vec{e}_x+2y\vec{e}_y\\ \vec{v}_3 &= (y^2-\frac{8}{3}y+\frac{8}{3})\vec{e}_x\end{aligned}$$



Lösung:

$$\begin{aligned}\int_{\text{Weg }1}\vec{v}_1\cdot d\vec{s} &= \int_{x=0}^{1}[(x+y)\vec{e}_x+x\vec{e}_y]_{y=1+x}\frac{d}{dx}(x\vec{e}_x+(1+x)\vec{e}_y)dx\\ &= \int_{x=0}^{1}[(1+2x)\vec{e}_x+x\vec{e}_y](\vec{e}_x+\vec{e}_y)dx=\int_{x=0}^{1}(1+3x)dx=\frac{5}{2}\ ,\\ \int_{\text{Weg }2}\vec{v}_1\cdot d\vec{s} &= \int_{x=0}^{1}[(x+y)\vec{e}_x+x\vec{e}_y]_{y=1}\frac{d}{dx}(x\vec{e}_x+\vec{e}_y)dx+\int_{y=1}^{2}[(x+y)\vec{e}_x+x\vec{e}_y]_{x=1}\frac{d}{dy}(\vec{e}_x+y\vec{e}_y)dy\\ &= \int_{x=0}^{1}(x+1)dx+\int_{y=1}^{2}dy=\frac{5}{2}\ ,\\ \vec{\nabla}\times\vec{v}_1 &= 0\ ,\quad \vec{v}_1=\vec{\nabla}(\frac{1}{2}x^2+xy)\ ,\\ \int_{\text{Weg }1}\vec{v}_2\cdot d\vec{s} &= \int_{x=0}^{1}[xy\vec{e}_x+2y\vec{e}_y]_{y=1+x}\frac{d}{dx}(x\vec{e}_x+(1+x)\vec{e}_y)dx\\ &= \int_{x=0}^{1}[x(1+x)\vec{e}_x+2(1+x)\vec{e}_y](\vec{e}_x+\vec{e}_y)dx=\int_{x=0}^{1}(x^2+3x+2)dx=\frac{23}{6}\ ,\\ \int_{\text{Weg }2}\vec{v}_2\cdot d\vec{s} &= \int_{x=0}^{1}[xy\vec{e}_x+2y\vec{e}_y]_{y=1}\frac{d}{dx}(x\vec{e}_x+\vec{e}_y)dx+\int_{y=1}^{2}[xy\vec{e}_x+2y\vec{e}_y]_{x=1}\frac{d}{dy}(\vec{e}_x+y\vec{e}_y)dy\\ &= \int_{x=0}^{1}x\,dx+\int_{y=1}^{2}2y\,dy=\frac{7}{2}\ ,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\text{Weg 1}} \vec{v}_3 \cdot d\vec{s} &= \int_{x=0}^{1} [(y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{8}{3})\vec{e}_x]_{y=1+x} \frac{d}{dx}(x\vec{e}_x + (1+x)\vec{e}_y)dx \\
&= \int_{x=0}^{1} (x^2 - \frac{2}{3}x + 1)dx = 1 \ , \\
\int_{\text{Weg 2}} \vec{v}_3 \cdot d\vec{s} &= \int_{x=0}^{1} [(y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{8}{3})\vec{e}_x]_{y=1} \frac{d}{dx}(x\vec{e}_x + \vec{e}_y)dx = \int_{x=0}^{1} dx = 1 \ .
\end{aligned}
$$

Da die Integrale für $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_1$ offensichtlich nicht wegunabhänig sind, können diese Vektorfelder nicht Gradienten einer skalaren Funktion sein.