Übungen zur Einführung in die Theoretische Physik (Rose/Hoffstätter)

29.4.1997, Übungsblatt Nr. 2

Aufgabe 1) Eine Ellipse, deren große Hauptachse in x-Richtung zeigt, ist definiert durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ , \quad a > b \ . \tag{1}$$

Auf der großen Hauptachse einer jeden Ellipse liegen zwei Brennpunkte. In der Darstellung (1) liegen diese bei $P_1 = (-f, 0)$ und bei $P_2 = (f, 0)$. Diese Brennpunkte zeichnen sich dadurch aus, daß die Länge eines Linienzuges von P_1 über einen Punkt (x, y), der auf der Ellipse liegt, zu P_2 nicht von der Wahl des Punktes (x, y) abhängt. Berechnen Sie f für die Ellipse (1). Legt man den Ursprung eines Koordinatensystems in den linken Brennpunkt $(-f, 0)$ der Ellipse, wie lautet dann die Definitionsgleichung $r = r(\phi)$ der Ellipse in Polarkoordinaten?

Aufgabe 2) Die Gravitationskraft, die von der Sonne auf die Erde ausgeübt wird, läßt sich durch $\vec{F} = -\frac{K}{r^3}\vec{r}$ beschreiben. Hierbei ist K eine Konstante und $\vec{r}$ der Vektor von der Sonne zur Erde. Ist diese Kraft konservativ, d.h. ist $\int_{P_0}^{P_1} \vec{F} \cdot \vec{ds}$ wegunabhänig? Wie lautet das Gravitationspotential der Sonne? Die Erde läuft entlang einer Ellipsenbahn um die Sonne. Dabei liegt die Sonne in einem der Brennpunkte der Ellipse. Berechnen Sie den Gewinn an kinetischer Energie des Planeten auf seinem Weg vom sonnenfernsten zum sonnennächsten Punkt seiner Bahn, indem Sie das Arbeitsintegral $\int_{P_0}^{P_1} \vec{F} \cdot \vec{ds}$ entlang der halben Ellipse berechnen. Vergleichen sie das Ergebnis mit der Änderung des Potentials zwischen diesen beiden Punkten.

Lösung:

Aufgabe 1) Die Strecke des Linienzuges P_1–(x, y)–P_2 ist

$$\sqrt{(x-f)^2 + y^2} + \sqrt{(x+f)^2 + y^2} = 2a \tag{2}$$

Die Konstante auf der rechten Seite ergibt sich für den Punkt $(a, 0)$ zu $2a$. Diese Gleichung definiert eine Beziehung zwischen x und y. Zweimaliges Quadrieren zeigt, daß diese Beziehung eine Ellipse beschreibt:

$$\begin{aligned}
4a^2 - 2[x^2 + y^2 + f^2] &= 2\sqrt{[(x^2 + y^2 + f^2)^2 - (2xf)^2]} \\
a^4 - a^2[x^2 + y^2 + f^2] &= -(xf)^2 \\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - f^2} &= 1 \text{ mit } f = \sqrt{a^2 - b^2} \ .
\end{aligned}$$

Wählen wir den Punkt $(-f,0)$ als Ursprung eines Polarkoordinatensystems, dann ist $x = r\cos(\phi) - f$ und $y = r\sin(\phi)$. Einsetzen in die Definitionsgleichung (1) der Ellipse liefert

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{[r\cos(\phi) - f]^2}{a^2} + \frac{r^2\sin(\phi)^2}{b^2} \ , \\
a^2b^2 &= r^2[b^2\cos(\phi)^2 + a^2\sin(\phi)^2] - 2r\cos(\phi)fb^2 + (a^2 - b^2)b^2 \ , \\
0 &= r^2[a^2 - f^2\cos(\phi)^2] - 2r\cos(\phi)fb^2 - b^4 \ , \\
r &= \frac{\cos(\phi)fb^2 \pm \sqrt{[\cos(\phi)fb^2]^2 + b^4[a^2 - f^2\cos(\phi)^2]}}{a^2 - f^2\cos(\phi)^2} \ , \\
r &= b^2\frac{\cos(\phi)f \pm a}{a^2 - f^2\cos(\phi)^2} \ .
\end{aligned}
$$

Da r positiv ist, kommt nur das positive Vorzeichen in Frage und es gilt:

$$
r = \frac{b^2}{a - f\cos(\phi)} \tag{3}
$$

Aufgabe 2) Das Wegintegral $\int_{P_0}^{P_1} \vec{F} \cdot \vec{ds}$ ist wegunabhänig, denn $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0$. Mit $V(r) = -K/r$ gilt $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$.

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_r &= \cos(\phi)\vec{e}_x + \sin(\phi)\vec{e}_y \ , \quad \vec{e}_\phi = -\sin(\phi)\vec{e}_x + \cos(\phi)\vec{e}_y \ , \quad \frac{d\vec{e}_r}{d\phi} = \vec{e}_\phi \ , \\
\vec{s}(\phi) &= r(\phi)\vec{e}_r \ , \quad \frac{d\vec{s}(\phi)}{d\phi} = r\vec{e}_\phi + \frac{dr}{d\phi}\vec{e}_r \\
\int_{P_0}^{P_1} \vec{F} \cdot \vec{ds} &= -\int_0^\pi \frac{K}{r^2}\vec{e}_r\frac{\vec{ds}}{d\phi}d\phi \\
&= -\int_0^\pi \frac{K}{r^2}\frac{dr}{d\phi}d\phi = -\int_{r(0)}^{r(\pi)} \frac{K}{r^2}dr \\
&= \frac{K}{r(\pi)} - \frac{K}{r(0)} = \frac{K}{b^2}(a+f) - \frac{K}{b^2}(a-f) = 2\frac{fK}{b^2} \ .
\end{aligned}
$$

Da das Potential durch $V(\vec{r}) = -K/r$ gegeben ist, erhalten wir

$$
\int_{P_0}^{P_1} \vec{F} \cdot \vec{ds} = V(P_0) - V(P_1) \ . \tag{4}
$$