Übungen zur Einführung in die Theoretische Physik (Rose/Hoffstätter)

6.5.1997, Übungsblatt Nr. 3

Aufgabe 1) Beweisen Sie die Beziehung

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\cdot\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\cdot\vec{A}) + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$$

und berechnen Sie die linke und rechte Seite dieser Gleichung für den Fall

$$\vec{A} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y \ , \quad \vec{B} = y\vec{e}_x + x^2y\vec{e}_y \ .$$

Aufgabe 2) Bestimmen Sie mit Hilfe der Frenetschen Formeln das begleitende Dreibein $(\vec{e}_n, \vec{e}_b, \vec{e}_t)$, die Krümmung κ und die Torsion τ der Raumkurve

$$\vec{r}(t) = R\begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \alpha t \end{pmatrix} \ .$$

Lösung:

Aufgabe 1) Wenn nur $\vec{A}(\vec{r})$ von x, y und z abhängt, nicht aber $\vec{B}$, dann folgt aus der "BACCAB" Formel

$$\vec{\nabla}[\vec{A}(\vec{r})\cdot\vec{B}] = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}(\vec{r}) + \vec{B}\times[\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})] \ .$$

Wenn sowohl $\vec{A}(\vec{r})$ als auch $\vec{B}(\vec{r})$ von x, y und z abhängen, dann müssen auch beide Funktionen gemäß der Produktregel abgeleitet werden. Es ist darauf zu achten, daß alle Funktionen rechts des $\vec{\nabla}$ Symbols abgeleitet werden. Im folgenden wird eine Funktion, die abgeleitet werden soll, mit ihrem Argument $\vec{r}$ geschrieben. Soll eine der Funktionen in einem Produkt nicht abgeleitet werden, so wird das Argument weggelassen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}[\vec{A}(\vec{r})\cdot\vec{B}(\vec{r})] &= \vec{\nabla}[\vec{A}(\vec{r})\cdot\vec{B}] + \vec{\nabla}[\vec{A}\cdot\vec{B}(\vec{r})] \\ &= (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}(\vec{r}) + \vec{B}\times[\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})] + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}(\vec{r}) + \vec{A}\times[\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r})] \ . \end{aligned}$$

Die letzte Zeile ist schon so geschrieben, daß rechts von $\vec{\nabla}$ nur Funktionen stehen, die abgeleitet werden sollen. Daher kann man nun wieder alle Funktionen ohne Argument $\vec{r}$ schreiben und erhält das Ergebnis

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\cdot\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\cdot\vec{A}) + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} \ . \tag{1}$$

Für $\vec{A} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$, $\vec{B} = y\vec{e}_x + x^2y\vec{e}_y$ ergibt sich

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{\nabla}xy(1+xy) = (1+2xy)(y\vec{e}_x + x\vec{e}_y) \ .$$

Bei der Auswertung der rechten Seite von (1) erhält man

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=0\ ,\quad \vec{\nabla}\times\vec{B}=(2xy-1)\vec{e}_z\ ,$$
$$\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})=(2xy-1)(y\vec{e}_x-x\vec{e}_y)$$
$$(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}=y\vec{e}_x+3x^2y\vec{e}_y\ ,\quad (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}=y\vec{e}_x+x^2y\vec{e}_y\ ,$$
$$\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\cdot\vec{B})+\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\cdot\vec{A})+(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}+(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}=(1+2xy)y\vec{e}_x+(1+2xy)x\vec{e}_y\ .$$

Aufgabe 2)

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= R\begin{pmatrix}\sin(t)\\ \cos(t)\\ \alpha t\end{pmatrix}\ ,\\
\vec{r}(s) &= R\begin{pmatrix}\sin(\frac{s}{R\sqrt{1+\alpha^2}})\\ \cos(\frac{s}{R\sqrt{1+\alpha^2}})\\ \alpha\frac{s}{R\sqrt{1+\alpha^2}}\end{pmatrix}\ ,\ \text{da } v=|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}|=\frac{ds}{dt}=R\sqrt{1+\alpha^2}\ ,\\
\vec{e}_t &= \frac{d\vec{r}(s)}{ds}=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\begin{pmatrix}\cos(\frac{s}{R\sqrt{1+\alpha^2}})\\ -\sin(\frac{s}{R\sqrt{1+\alpha^2}})\\ \alpha\end{pmatrix}\ ,\\
\kappa &= |\frac{d\vec{e}_t}{ds}|=\frac{1}{R(1+\alpha^2)}\ ,\\
\vec{e}_n &= \frac{1}{\kappa}\frac{d\vec{e}_t}{ds}=\begin{pmatrix}-\sin(\frac{s}{R\sqrt{1+\alpha^2}})\\ -\cos(\frac{s}{R\sqrt{1+\alpha^2}})\\ 0\end{pmatrix}\ ,\\
\vec{e}_b(s) &= \vec{e}_t(s)\times\vec{e}_n(s)=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\begin{pmatrix}\alpha\cos(\frac{s}{R\sqrt{1+\alpha^2}})\\ -\alpha\sin(\frac{s}{R\sqrt{1+\alpha^2}})\\ -1\end{pmatrix}\ ,\\
\tau(s) &= -\frac{d\vec{e}_b(s)}{ds}\cdot\vec{e}_n(s)=\frac{-\alpha}{R(1+\alpha^2)}\ .
\end{aligned}$$