Übungen zur Einführung in die Theoretische Physik (Rose/Hoffstätter)

13.5.1997, Übungsblatt Nr. 4

Aufgabe 1) Gegeben sei ein Strömungsfeld

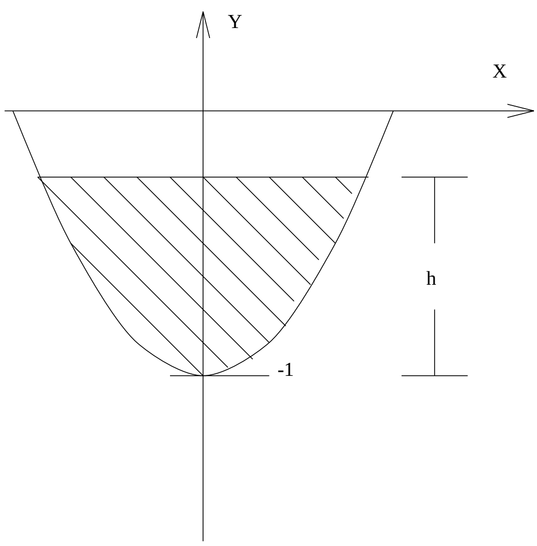
$$\vec{v}(x,y,z) = \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_x}{x^2+y^2} \ , \quad x,y \in I\!R\backslash\{0\} \ , \quad z \in I\!R \ . \tag{1}$$

Berechnen Sie die Divergenz dieses Strömungsfeldes für den Definitionsbereich. Was ergibt sich für die Divergenz auf der z-Achse.

Aufgabe 2) In einer Röhre mit parabelförmigem Querschnitt fließt Wasser mit einem Geschwindigkeitsprofil

$$\vec{v}(x,y) = (1 - x^2 + y)\vec{e}_z \ .$$

Wie groß ist der Fluß durch eine Ebene $z = const.$ in Abhängigkeit von der Füllhöhe h, wenn die Berandung der Röhre durch $y = x^2 - 1$ beschrieben wird?



Lösung:

Aufgabe 1) Für $x, y, \in I\!R\backslash\{0\}$ gilt

$$\mathrm{div}\vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{2}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0 \ .$$

Selbst auf der z-Achse ist die Divergenz im allgemeinen definiert, denn dort gilt

$$\mathrm{div}\vec{v} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \int\int_{\delta V} \vec{v} \cdot d\vec{r} \ ,$$

wobei V ein Volumen ist, das einen Punkt $z_0\vec{e}_z$ auf der z-Achse enthält. Die Berandung des Volumens ist mit δV bezeichnet. Legt man einen Zylinder mit Radius R von $z = z_0 - H$ bis $z = z_0 + H$ um die z-Achse, so liefert das Oberflächenintegral auf den Stirnseiten keinen Beitrag, da dort $\vec{v}$ parallel zu der Oberfläche verläuft. Das gesamte Oberflächenintegral reduziert sich also auf das Integral über den Mantel. Den Mantel parametrisiert man zweckmäßig mit einer Höhe h und einem Winkel ϕ, so daß ein Raumpunkt auf der Oberfläche gegeben ist durch

$$\vec{r} = R[\cos(\phi)\vec{e}_x + \sin(\phi)\vec{e}_y] + (z_0 + h)\vec{e}_z \ . \tag{2}$$

Die Tangentialvektoren und der Normalenvektor ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \vec{t}_h &= \frac{d\vec{r}}{dh} = \vec{e}_z \ , \quad \vec{t}_\phi = \frac{d\vec{r}}{d\phi} = R(-\sin(\phi)\vec{e}_x + \cos(\phi)\vec{e}_y) \ , \\ \vec{n} &= \vec{t}_\phi \times \vec{t}_z = R(\cos(\phi)\vec{e}_x + \sin(\phi)\vec{e}_y) \ . \end{aligned}$$

Damit läßt sich das Oberflächenintegral über den Zylinder folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} \int\int_{\delta V} \vec{v} \cdot d\vec{a} &= \int_{-H}^{H} \int_0^{2\pi} R \frac{\cos\phi\vec{e}_x + \sin(\phi)\vec{e}_y + h\vec{e}_z}{R^2} \vec{n} d\phi dh \\ &= 2\pi \int_{-H}^{H} dh = 4\pi H \ . \end{aligned}$$

Der Grenzwert für kleine $V = 2\pi R^2 H$ von

$$\frac{1}{V} \int\int_{\delta V} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2\pi R^2 H} 4\pi H$$

divergiert. Auf der z-Achse befindet sich daher ein Quellfaden unendlich großer Quellstärke.

Aufgabe 2) Der gesamte Durchsatz an Wasser ergibt sich aus folgendem Integral:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{h} \int_{-\sqrt{1+y}}^{\sqrt{1+y}} (1 - x^2 + y) dx dy &= \int_{-1}^{h-1} \left[x(1+y) - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{1+y}}^{\sqrt{1+y}} dy \\ &= \int_{-1}^{h-1} \left(2(1+y)\sqrt{1+y} - 2\frac{\sqrt{1+y}^3}{3} \right) dy \\ &= \int_{-1}^{h-1} \frac{4}{3}(1+y)\sqrt{1+y} dy \\ &= \left[\frac{8}{15}\sqrt{1+y}^5 \right]_{-1}^{h-1} = \frac{8}{15}\sqrt{h}^5 \ . \end{aligned}$$