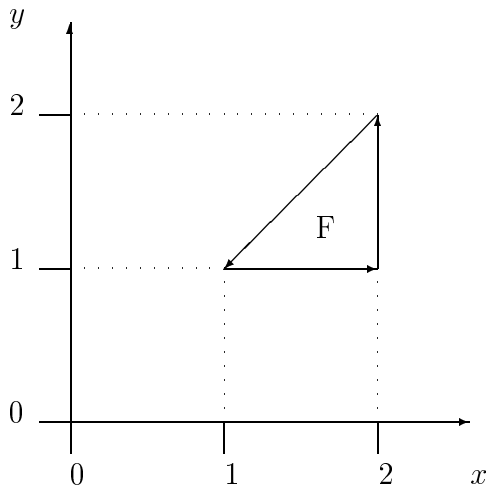
Übungen zur Einführung in die Theoretische Physik (Rose/Hoffstätter)

20.5.1997, Übungsblatt Nr. 5

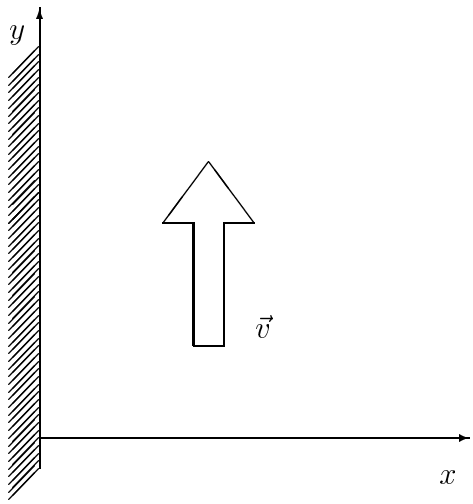
Aufgabe 1) Die Formel

$$\int_{\delta F} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_F (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{a}$$

faßt den Stokes'schen Satz zusammen. Dabei ist F eine einfach zusammenhängende Oberfläche und δF deren Rand. (Einfach zusammenhängend bedeutet anschaulich, daß man jede geschlossene Kurve auf F zu einem beliebigen Punkt in F zusammenziehen kann).
Verifizieren Sie den Stokes'schen Satz für das Vektorfeld $\vec{v} = xy\vec{e}_x + 2y\vec{e}_y$ und die Fläche $F = \{(x,y)|x \in [1,2], y \in [1,2], x \leq y\}$.



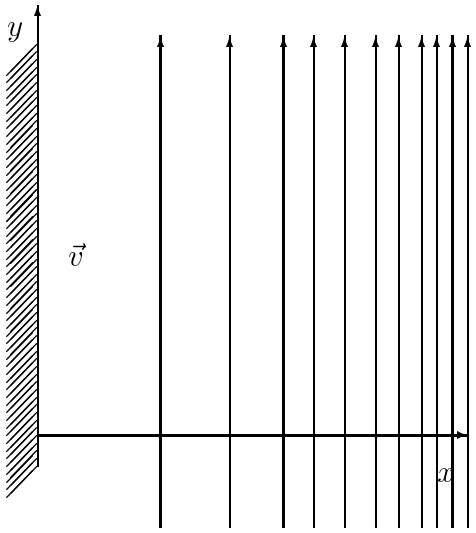
Aufgabe 2) Das Geschwindigkeitsfeld einer viskosen Flüssigkeit in der Nähe einer Grenzschicht nimmt näherungsweise linear mit dem Abstand von dieser Schicht zu. Hier wird dies durch $\vec{v} = ax\vec{e}_y$ beschrieben, wobei a eine Proportionalitätskonstante darstellt. Skizzieren Sie die Stromlinien dieses Feldes; beachten Sie dabei, daß die Stromliniendichte ein Maß für den Betrag von $\vec{v}$ ist. Berechnen Sie die Rotation und begründen Sie damit, wie sich eine Scheibe bewegt, die in der x-y Ebene entlang der Grenzschicht schwimmt.



Lösung:

Aufgabe 1)

$$\int_{\delta F} \vec{v} \cdot d\vec{r} \;=\; \int_{x=1}^{2} \vec{v}(x,1) \cdot \vec{e}_x dx + \int_{y=1}^{2} \vec{v}(2,y) \cdot \vec{e}_y dy + \int_{x=1}^{2} \vec{v}(x,x) \cdot (\vec{e}_x + \vec{e}_y) dx$$

$$
\begin{aligned}
&= [\frac{x^2}{2}]_{x=1}^{2} + [y^2]_{y=1}^{2} + [\frac{x^3}{3} + x^2]_{x=2}^{1} = -\frac{5}{6} \\
\int_F (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{a} &= \int_{x=1}^{2} \int_{y=1}^{x} -x\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z dx dy \\
&= \int_{x=1}^{2} (x - x^2) dx = [\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}]_{x=1}^{2} = -\frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2) Die Rotation ergibt sich zu $\vec{\nabla} \times \vec{v} = a\vec{e}_z$ und hängt nicht von der Position ab. Der Teil einer Scheibe, der bei größeren x-Werten liegt wird stärker bewegt, als der Teil, der bei kleineren x-Werten liegt, daher wird die Scheibe in eine Rotation um die z-Achse gebracht. Die Differenz der Geschwindigkeit zwischen diesen beiden Teilen der Scheibe ist für alle Stellen in der x-y Ebene gleich; die Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe hängt daher, ebenso wie die Rotation von $\vec{v}$, nicht von der Position ab.