Ubungen zur Einführung in die Theoretische Physik (Rose/Hoffstätter)

■ Anleitung

Nachfolgend finden Sie Übungsaufgaben und Musterlösungen. Unter den [redacted] geschriebenen Titeln wurde bisher noch nichts eingetragen. Blau geschriebene Titel enthalten bereits Musterlösungen, wahrend magenta die Übungen kennzeichnet, die noch keine Musterlösung enthalten.

Doppeltklicken Sie an den Balken mit dem Pfeil Symbol rechts neben der Übung, die Sie ansehen möchten. Doppeltklicken Sie dann an den entsprechenden Balken rechts neben der Aufgabe, die Sie behandeln möchten. Nun müssen Sie systematisch den Cursor nacheinander in jedes umrahmte Feld bewegen und dann gleichzeitig die Shift–Taste und Return drücken. Dabei werden die Ausdrücke in den umrahmten Feldern ausgewertet. Da manche Rechnungen innerhalb einer Aufgabe aufeinander Bezug nehmen, darf kein Kästchen ausgelassen werden. Verschiedene Aufgaben nehmen allerdings keinen Bezug aufeinander, daher müssen immer nur die Kästchen innerhalb einer Aufgabe ausgewertet werden.

Vergessen Sie dabei nie, Mathematicas Informationen mit Ihren analytisch gewonnenen Ergebnissen zu vergleichen.

■ 4. Präsenzübung, 15/16. 5. 97

■ Aufgabe 1)

Gegeben sei ein Strömungsfeld

$$v[x\_, y\_] := \frac{\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}}{x^2 + y^2}$$

wobei $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^2 \backslash \{0\}.$

■ a)

Berechnen Sie die Rotation dieses Strömungsfeldes für den Definitionsbereich.

■ Lösung:

Zunächst muß ein Paket zur Vektoranalysis eingelesen werden. In diesem Paket wird unter anderem die Rotation (Curl in englisch) definiert.

```
<< Calculus`VectorAnalysis`
```

Für unsere Zwecke ist es sinnvoll, die interne Definition etwas zu ändern

```
rot[v_] := Curl[Flatten[v /. {x -> Xx, y -> Yy}]] /. {Xx -> x, Yy -> y} // Simplify
```

```
rot[v[x, y]]
```

```
{0, 0, 0}
```

■ **b)**

Die Formel $\int_{dF} v \hat{a} r = \int_F rot[v] \hat{a} a$ faßt den Stokes'schen Satz zusammen. Dabei ist F eine einfach zusammenhängende Oberfläche und δF deren Rand. (Einfach zusammenhängend bedeutet anschaulich, daß man jede geschlossene Kurve auf F zu einem beliebigen Punkt in F zusammenziehen kann). Berechnen Sie $\oint v \, dr = \int_0^{2\pi} v \cdot \partial_\varphi r \, d\varphi$ entlang der Raumkurve

```
r[φ_] := a {Cos[φ], Sin[φ], 0};
```

wobei $\varphi \in [0,2\pi]$, und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Oberflächenintegral $\int_F rot[v] \, da$ über die eingeschlossene Fläche, den Ursprung ausgenommen. Bestätigt dieses Beispiel den Stokes'schen Satz? Was läßt sicl über die Rotation am Ursprung sagen?

■ **Lösung:**

Zur Vereinfachung definieren wir das Vektorfeld $\mathbf{v}$ als Funktion des Vektors $\mathbf{r}$

```
w[r_] := Flatten[v[Flatten[r][[1]], Flatten[r][[2]]]]
```

```
∫_0^(2 π) w[r[φ]] . ∂_φ r[φ] dφ
```

```
{2 π}
```

Daraus ergibt sich, daß die Rotation am Ursprung divergiert, denn $\frac{1}{F} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} v \cdot \partial_\varphi r \, d\varphi = \frac{2}{a^2}$ geht gegen Unendlich, wenn der Radius gegen Null geht. Dieses Beispiel bestätigt den Stokes' schen Satz zwar nicht, stellt aber auch kein Widerspruch zu ihm dar, denn das Gebiet $\mathcal{R}^2 \backslash \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.

■ c)

Zeichnen Sie ein Stromlinienbild des Strömungsfeldes $\mathbf{V}$ und erläutern Sie anschaulich, wieso das Umlaufintegral nicht vom Radius abhängt.

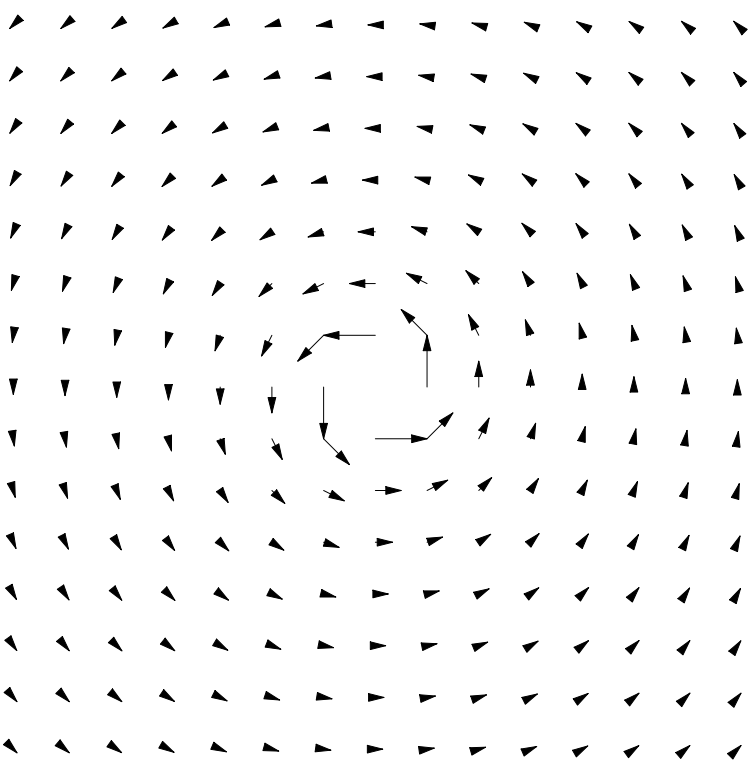
■ Lösung:

Um zweidimensionale Stromlinienbilder zu zeichnen, muß zunächst ein Paket geladen werden.

```
<< Graphics'PlotField'
```

```
Off[Power::"infy", ∞::"indet"]
```

```
PlotVectorField[w[{x, y, 0}][[{1, 2}]], {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
```



```
- Graphics -
```

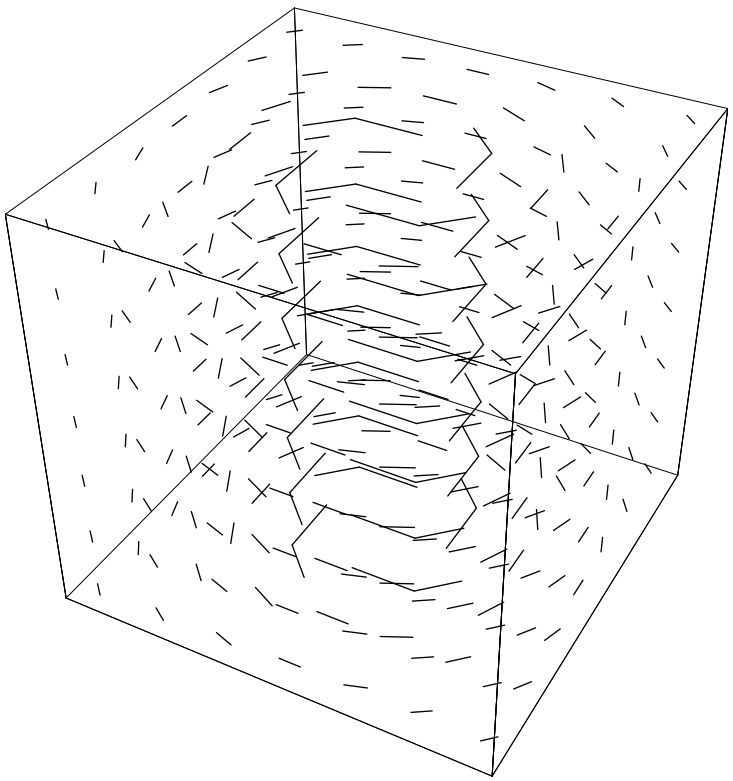
```
On[Power::"infy", ∞::"indet"]
```

Das dreidimensionale Stromlinienfeld läßt sich weniger gut darstellen. Auch hierfür muß zunächst ein Paket geladen werden

```
<< Graphics'PlotField3D'
```

```
Off[Power::"infy", ∞::"indet"]
```

```
PlotVectorField3D[w[{x, y, 0}],
 {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}]
```



- Graphics3D -

```
On[Power::"infy", ∞::"indet"]
```

■ Weiterführende Anregungen

Untersuchen Sie andere Vektorfelder. Wie wäre es mit

$$v[x\_, y\_] := \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder mit

$$v[x\_, y\_] := \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}}{x^2 + y^2}$$

Wenn definierte Funktionen und Variablen nicht mehr gebraucht werden, sollte man diese Definitionen beseitigen.

```
Clear[rot, v, r, w]
```

■ 5. Präsenzübung, 22/23. 5. 97

■ Aufgabe 1)

Die Taylorreihe um den Wert $x = x_0$ einer unendlich oft differenzierbaren Funktion $f(x)$ ist definiert als

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right) \Big|_{x_0} (\Delta_x)^n, \quad \text{mit } \Delta_{x=x-x\_0}.$$

In vielen relevanten Fällen konvergiert diese Reihe gegen den Funktionswert $f(x)$, insbesondere wenn x in der Nähe von x_0 liegt, $|x_0|$ also klein ist. Auch für mehrdimensionale Funktionen $F(\vec{r})$ lälßt sich eine Taylorreihe um einen Punkt $\vec{r}_0$ berechnen. Dazu führt man den relativen Abstand s von diesem Punkt ein und schreibt $F(\vec{r}_s) = f(1)$ mit $\vec{r}_s = \vec{r}_0 + s \vec{\Delta}_r$ und $\vec{\Delta}_r = \vec{r} - \vec{r}_0$. Die Funktionswerte $f(1)$ und $F(\vec{r})$ stimmen dann überein. Mittels der Produktregel erfüllt man die Taylorreihe der Funktion $f(s)$ zu

$$\begin{aligned} T_F(\vec{r}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right) \Big|_{x_0} (\Delta_x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \left[\frac{dx}{ds} \partial_x + \frac{dy}{ds} \partial_y + \frac{dz}{ds} \partial_z \right]^n F(\vec{r}) \right) \Big|_{\vec{r}_0} (s)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \left[\vec{\Delta}_r \cdot \vec{\nabla} \right]^n F(\vec{r}) \right) \Big|_{\vec{r}_0} (s)^n . \end{aligned}$$

Für $s = 1$ erhält man daraus die Taylorreihe der Funktion $F(\vec{r})$

$$T_F(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \left[\vec{\Delta}_r \cdot \vec{\nabla} \right]^n F(\vec{r}) \right) \Big|_{\vec{r}_0}, \quad \vec{\Delta}_r = \vec{r} - \vec{r}_0 .$$

■ a)

Nähert man die Funktion $F(x, y)$ durch ihr Taylorpolynom bis zur zweiten Ordnung in Bezug auf die x–Abhängigkeit, so erhält man

$$F(x, y) \approx F(x_0, y_0) + \partial_x F(x, y) \Big|_{x_0} \Delta_x + \frac{1}{2} \partial_x^2 F(x, y) \Big|_{x_0} \Delta_x^2 .$$

Nähert man diese Funktion nun durch eine Taylorreihe um y_0 bis zu zweiter Ordnung in Bezug auf y so ergibt sich

$$\begin{aligned} F(x, y) \approx\ & F(x_0, y_0) \\ & + \partial_x F(x, y_0) \Big|_{x_0} \Delta_x + \frac{1}{2} \partial_x^2 F(x, y_0) \Big|_{x_0} \Delta_x^2 \\ & + \partial_y F(x_0, y) \Big|_{y_0} \Delta_y + \partial_x \partial_y F(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)} \Delta_x \Delta_y \\ & + \frac{1}{2} \partial_y^2 F(x_0, y) \Big|_{y_0} \Delta_y^2 \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß diese Näherung dem Taylorpolynom $T_F(\vec{r})$ von $F(x, y)$ bis Ordnung aus obiger Gleichung entspricht.

■ **Lösung:**

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &\approx \sum_{n=0}^{2} \left(\frac{1}{n!} \left[\vec{\Delta}_r \cdot \vec{\nabla} \right]^n F(\vec{r}) \right) \Big|_{\vec{r}_0} \\
&= \left\{ F(\vec{r}) + \left[\vec{\Delta}_r \cdot \vec{\nabla} \right] F(\vec{r}) + \frac{1}{2} \left[\vec{\Delta}_r \cdot \vec{\nabla} \right]^2 F(\vec{r}) \right\} \Big|_{\vec{r}_0} \\
&= \left\{ F(\vec{r}) + [\Delta_x \partial_x + \Delta_y \partial_y + \Delta_z \partial_z] F(\vec{r}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} [\Delta_x \partial_x + \Delta_y \partial_y + \Delta_z \partial_z]^2 F(\vec{r}) \right\} \Big|_{\vec{r}_0} \\
&= F(x_0, y_0) \\
&\quad + \partial_x F(x, y_0) \Big|_{x_0} \Delta_x + \frac{1}{2} \partial_x^2 F(x, y_0) \Big|_{x_0} \Delta_x^2 \\
&\quad + \partial_y F(x_0, y) \Big|_{y_0} \Delta_y + \partial_x \partial_y F(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)} \Delta_x \Delta_y \\
&\quad + \frac{1}{2} \partial_y^2 F(x_0, y) \Big|_{y_0} \Delta_y^2
\end{aligned}
$$

In *Mathematica* können Taylorpolynome berechnet werden. Hier ein eindimensionales Beispiel, die Taylorreihe der Funktion `f(x)` bis zur zweiten Ordnung um den Punkt x_0.

```
Series[f[x], {x, x0, 2}]
```

$$f[x0] + f'[x0]\,(x - x0) + \frac{1}{2} f''[x0]\,(x - x0)^2 + O[x - x0]^3$$

Der Ausdruck `O[x - x0]^3` gibt an, daß der Rests der Taylorreihe Anteile dritter und eventuell höherer Ordnung enthält. Diesen Ausdruck kann man mit der Funktion `Normal[...]` beseitigen.

```
Normal[Series[f[x], {x, x0, 2}]]
```

$$f[x0] + (x - x0)\, f'[x0] + \frac{1}{2} (x - x0)^2 f''[x0]$$

Um die Taylorreihe einer zweidimensionalen Funktion `f(x,y)` zu berechnen, führen wir zunächst die eindimensionale Funktion `g(s) = f(x0 + s Δx, y0 + s Δy)` und entwickeln diese bis zur zweiten Ordnung in ein Taylorpolynom in `s` um `s=0`. Anschließend wird `s` mit `[...]/.s->1` zu `1` gesetzt.

```
g[s_] := f[x0 + s (x - x0), y0 + s (y - y0)]; Normal[Series[g[s], {s, 0, 2}]] /. s -> 1
```

$$f[x0, y0] + (y - y0)\, f^{(0,1)}[x0, y0] + \frac{1}{2} (y - y0)^2 f^{(0,2)}[x0, y0] + (x - x0)\, f^{(1,0)}[x0, y0] + (x - x0)\,(y - y0)\, f^{(1,1)}[x0, y0] + \frac{1}{2} (x - x0)^2 f^{(2,0)}[x0, y0]$$

Die an `f` hochgestellte Zahlen bedeuten Ableitungen nach `x` und `y`. Entwickelt man die Funktion $f(x, y)$ zunächst nach `x` um `x0` bis zur zweiten Ordnung und dann nach `y` um `y0` bis zur zweiten Ordnung, so erhält man

```
Normal[Series[Series[f[x, y], {x, x0, 2}], {y, y0, 2}]]
```

$$f[x0, y0] + (x - x0)\, f^{(1,0)}[x0, y0] + \frac{1}{2} (x - x0)^2 f^{(2,0)}[x0, y0] + (y - y0) \left(f^{(0,1)}[x0, y0] + (x - x0)\, f^{(1,1)}[x0, y0] + \frac{1}{2} (x - x0)^2 f^{(2,1)}[x0, y0] \right) + (y - y0)^2 \left(\frac{1}{2} f^{(0,2)}[x0, y0] + \frac{1}{2} (x - x0)\, f^{(1,2)}[x0, y0] + \frac{1}{4} (x - x0)^2 f^{(2,2)}[x0, y0] \right)$$

Die Terme, bei denen die Summe aus der Ordnung von (x−x0) und Ordnung von (y−y0) kleiner gleich zwei sind, stimmen mit den Termen in obiger Gleichung überein.

■ b)

Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion $F(x, y) = x y^2 + x^3$ um $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

■ Lösung:

```
f[x_, y_] := x y^2 + x^3; x0 = 0; y0 = 0;
g[s_] := f[x0 + s (x - x0), y0 + s (y - y0)]; Normal[Series[g[s], {s, 0, 3}]] /. s -> 1
```

$x^3 + x y^2$

Man sollte nach jeder abgeschlossenen Aufgabe die verwendeten Variablen am Ende jeder Aufgabe zu initialisieren.

```
g[a_] =.; f[a_, b_] =.
```

■ Aufgabe 2)

Gegeben sei ein skalares Feld $F(\vec{r})$. Die Flächen konstanten Potentials haben die Parameterdarstellung $F(\vec{r}) = C$ mit einer Konstanten C. Sei nun s die Bogenlänge entlang einer Kurve, die auf einer solchen Niveaufläche liegt. Dann ändert sich $F(\vec{r})$ nicht, wenn sich $\vec{r}(s)$ entlang dieser Kurve bewegt. Somit gilt $\frac{dF(\vec{r}(s))}{ds} = 0$. Daraus folgt direkt, daß $\vec{\nabla} F(\vec{r})$ senkrecht auf der Niveaufäche steht, denn

$$\frac{dF(\vec{r}(s))}{ds} = \frac{dx}{ds}\,\partial_x F(\vec{r}) + \frac{dx}{ds}\,\partial_x F(\vec{r}) + \frac{dx}{ds}\,\partial_x F(\vec{r})$$
$$= \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \vec{\nabla} F(\vec{r}) = \vec{e}_t \cdot \vec{\nabla} F(\vec{r}) = 0 .$$

Hier ist $\vec{e}_t$ der Tangentialvektor entlang der beschriebenen Kurve. Da $\vec{\nabla} F(\vec{r})$ somit senkrecht auf jedem Tangentialvektor der Niveaufläche steht, steht der Gradient senkrecht auf dieser Fläche. Stellen Sie den Tangentialvektor der Feldlinie durch den Punkt $\vec{r}$ mittels des Gradienten dar. Berechnen Sie außerdem mittels der Frenetschen Formeln die Krümmung der Feldlinien des skalaren Feldes $F(\vec{r})$. Berechnen Sie das Frenetsche Dreibein und die Krümmung der Feldlinien für den Fall

$$F(x,y,z) = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0 .$$

■ Lösung:

$$\vec{e}_t = \vec{\nabla} F(\vec{r}) \,/\, \left| \vec{\nabla} F(\vec{r}) \right|$$
$$\kappa = \left| \frac{d}{ds} \vec{e}_t \right| = \left| \left[\frac{dx}{ds}\partial_x + \frac{dy}{ds}\partial_y + \frac{dz}{ds}\partial_z \right] \vec{e}_t \right|$$
$$= \left| \left(\vec{e}_t \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{e}_t \right|$$

Folgendes Paket wurde schoneinmal verwendet:

```
<< Calculus`VectorAnalysis`
```

Die Variablen `x` und `y` werden in diesem Paket als `Xx` und `Yy` bezeichnet. Die Funktion wird also definiert durch:

```
f = Xx / Yy
```

$$\frac{Xx}{Yy}$$

```
∇f = Grad[f]
```

$$\left\{\frac{1}{Yy}, -\frac{Xx}{Yy^2}, 0\right\}$$

```
ê_t = ∇f / √(∇f . ∇f) // Simplify
```

$$\left\{\frac{1}{Yy\sqrt{\frac{Xx^2+Yy^2}{Yy^4}}}, -\frac{Xx}{Yy^2\sqrt{\frac{Xx^2+Yy^2}{Yy^4}}}, 0\right\}$$

Die `i`−te Komponenten des Tangentenvektors wird durch `et[[i]]` bezeichnet. Die einzelnen Komponenten von $(\vec{e}_t \cdot \vec{\nabla})\vec{e}_t$ sind also

```
k1 = ê_t . Grad[ê_t[[1]]] // Simplify;
k2 = ê_t . Grad[ê_t[[2]]] // Simplify;
k3 = ê_t . Grad[ê_t[[3]]] // Simplify;
```

Die Krümmung ergibt sich dann durch den Betrag mittels

```
κ = √(k1^2 + k2^2 + k3^2) // Simplify
```

$$\sqrt{\frac{1}{Xx^2+Yy^2}}$$

Der Normalenvektor ist gegeben durch $\hat{e}_n = \frac{1}{\kappa}\frac{dl}{ds}\hat{e}_t$. Die Ableitung nach s schreibt man wieder mittels des Gradienten und erhält $\hat{e}_n = \left(\hat{e}_t \bullet \vec{\nabla}\right)\hat{e}_t \;/\; \left|\left(\hat{e}_t \cdot \vec{\nabla}\right)\hat{e}_t\right|$. Dies läßt sich mit *Mathematica* berechnen

```
ê_n = {k1, k2, k3} 1/κ // Flatten
```

$$\left\{-Xx\sqrt{\frac{1}{Xx^2+Yy^2}}, -Yy\sqrt{\frac{1}{Xx^2+Yy^2}}, 0\right\}$$

Der Binormalenvektor berechnet sich dann durch $\hat{e}_b = \hat{e}_t \times \hat{e}_n$ zu

```
ê_b = Cross[ê_t, ê_n] // Simplify
```

$$\left\{0, 0, -Yy^2\sqrt{\frac{1}{Xx^2+Yy^2}}\sqrt{\frac{Xx^2+Yy^2}{Yy^4}}\right\}$$

Das Quadrieren der Komponenten in $\vec{e}_b$ zeigt, daß es sich um den Einheitsvektor in z–Richtung handelt.

```
ê_b * ê_b
```

```
{0, 0, 1}
```

Man sollte nicht vergessen, die verwendeten Variablen am Ende jeder Aufgabe zu initialisieren.

```
∇f =.; f =.; ê_t =.; k_1 =.; k_2 =.; k_3 =.; κ =.; ê_n =.; ê_b =.;
```

■ 6. Hausübung, 27. 5. 97

■ Aufgabe 1)

Gegeben sie die Kurve $y(x) = \frac{-1}{2} a (x - x_0)^2 + b (x - x_0) + y_0$ Ein Körper der Masse m werde durch eine Schiene entlang dieser Kurve geführt. Die Führungskraft, die die Schiene dabei aufbringt, hängt vom Zeitverlauf der Bewegung $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ab.

■ a)

Geben Sie für einen beliebigen zeitlichen Verlauf $x(t)$ der x–Komponente der Bewegung die Führungskraft $\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$ im Bahnpunkt (x,y) an.

■ Lösung:

Die Gesamtkraft, die auf die Masse wirkt läßt sich aus der zweiten Zeitableitung berechnen. Zunächst lassen wir dazu eine beliebige Kurve $y(x)$ zu.

$$\vec{a} = \partial_t{}^2 \begin{pmatrix} x(t) \\ y(x(t)) \end{pmatrix} = \partial_t \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \partial_x y(x) \end{pmatrix} \partial_t x(t) \right]$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \partial_x y(x) \end{pmatrix} \partial_t{}^2 x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_x{}^2 y(x) \end{pmatrix} (\partial_t x(t))^2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix} \ddot{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ y'' \end{pmatrix} \dot{x}^2 \right]$$

Dieses Ergebnis überprüft man mit *Mathematica* folgendermaßen:

```
ā = ∂_{t,t} ( x[t] ) // Flatten; MatrixForm[ā]
            ( y[x[t]] )
```

$$\begin{pmatrix} x''[t] \\ y'[x[t]]\, x''[t] + x'[t]^2\, y''[x[t]] \end{pmatrix}$$

Die Funktion `Flatten` bewirkt, daß $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ als Vektor verstanden wird. `[...]//Flatten` bezeichnet das Anwenden der Funktion `Flatten` und ist daher identisch zu `Flatten[...]`. Die Funktion `MatrixForm` wird benötigt, um den Vektor auf der rechten Seite als aufrechten Vektor darzustellen.

Die Führungskraft ist der Teil der Kraft, der senkrecht auf der Bahnkurve steht. Wenn $\vec{e}_t$ den Tangentialvektor der Kurve darstellt, dann ist die Führungskraft gegeben durch

$\vec{F} = [\vec{a} - \vec{e}_t\ (\vec{e}_t \cdot \vec{a})]\ m$

Für eine beliebige Kurve $y(x)$ hat Tangentialvektor die Darstellung $\vec{e}_t = \frac{\partial_x \vec{r}}{\left|\partial_x \vec{r}\right|} = \begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix} \Big/ \sqrt{1 + y'^2}$ und ist paralell zum ersten Term in obiger Darstellung der Kraft $\vec{F}$. Daraus folgt für die Führungskraft

$\vec{F} = m\left[\begin{pmatrix} 0 \\ y'' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix} \frac{y'\,y''}{1+y'^2}\right] \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} -y' \\ 1 \end{pmatrix} \frac{y''}{1+y'^2}\,\dot{x}^2\,m\,.$

Mit *Mathematica* erhält man für den Tangentenvektor das gleiche Ergebnis:

```
r = {x, y[x]} // Flatten; e_t = ∂_x r / Sqrt[∂_x r . ∂_x r] /. x -> x[t];
MatrixForm[e_t]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+y'[x[t]]^2}} \\ \frac{y'[x[t]]}{\sqrt{1+y'[x[t]]^2}} \end{pmatrix}$$

Der Punkt "." bezeichnet das Skalarprodukt und `/.x->x[t]` bewirkt die Ersetzung von `x` durch $x(t)$.

Aus der Definitionsgleichung für die Führungskraft folgt dann obiges Ergebnis

```
F = (a - e_t (e_t . a)) m // Simplify; MatrixForm[F]
```

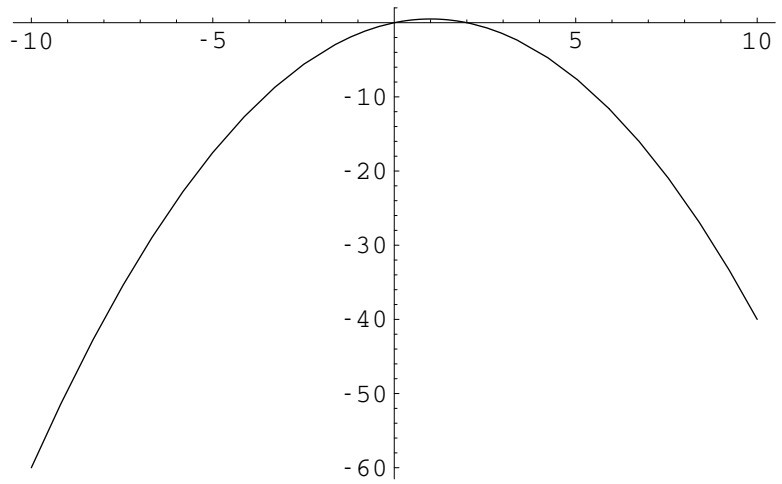
$$\begin{pmatrix} -\frac{m\,x'[t]^2\,y'[x[t]]\,y''[x[t]]}{1+y'[x[t]]^2} \\ \frac{m\,x'[t]^2\,y''[x[t]]}{1+y'[x[t]]^2} \end{pmatrix}$$

Nun wählen wir für $y(x)$ die angegebene Bahnkurve

```
y[x_] := -a/2 (x - x0)^2 + b (x - x0) + y0
```

Eine Vorstellung der in diesem Falle sehr einfachen Bahnkurve erhält man mittels folgenden Befehls:

```
Plot[y[x] /. {a -> 1, b -> 1, x0 -> 0, y0 -> -2}, {x, -10, 10}]
```



- Graphics -

Die Spezifikation der Kurve `y(x)` wird nun automatisch in die Führungskraft eingesetzt

```
MatrixForm[F⃗]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{a\,m\,(b-a\,x[t])\,x'[t]^2}{1+(b-a\,x[t])^2} \\ -\frac{a\,m\,x'[t]^2}{1+(b-a\,x[t])^2} \end{pmatrix}$$

■ **b)**

Die Bewegung eines Körpers der Masse `m` entlang der gegebenen Kurve `y(x)` finde in einem Gradientenkraftfeld mit dem Potential φ=mgy statt. Berechnen Sie mit Hilfe der Newtonschen Bewegungsgleichung $\vec{F} = m\,\vec{a}$ eine Parameterdarstellung mit der Zeit als Parameter, für die die Bewegung ohne Führungskraft verläuft. Die Schiene ist dann überflüssig. Welches physikalische Problem wird hierdurch beschrieben?

■ **Lösung:**

In diesem Fall muß die Schwerkraftskomponente, die senkrecht zur Bahnkurve steht, genau die Führungskraft ersetzen.

$$\vec{F}_g = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_t = \begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix} \Big/ \sqrt{1 + y'^2},$$

$$\vec{F} = m \begin{pmatrix} -y' \\ 1 \end{pmatrix} \frac{y''}{1+y'^2}\,\dot{x}^2 = \left[\vec{F}_g - \vec{e}_t \left(\vec{e}_t \cdot \vec{F}_g\right)\right]$$

$$= -mg\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix} \frac{y'}{1+y'^2}\right] = -\begin{pmatrix} -y' \\ 1 \end{pmatrix} \frac{mg}{1+y'^2}$$

Somit muß also gelten $y''\,\dot{x}^2 = -a\,\dot{x}^2 = g$ und daher $x(t) = \pm t\sqrt{g/a}$.

■ **Weiterführende Anregungen**

Was ist die Führungskraft, wenn `x(t)=v t` und `y(x)=sin(x)`?

Man sollte nicht vergessen, die verwendeten Variablen am Ende jeder Aufgabe zu initialisieren.

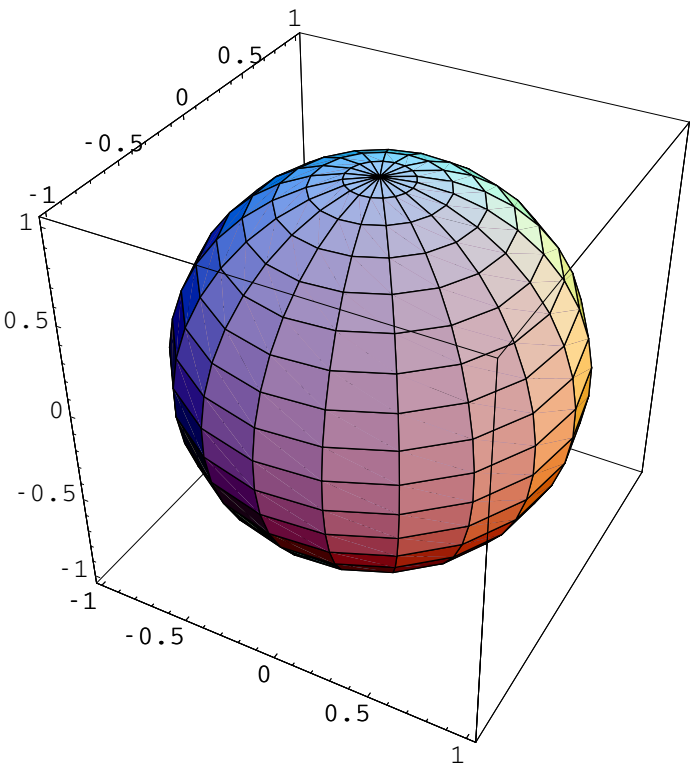
```
a = .; r = .; e_t = .; F = .; y[a_] = .
```

■ 6. Präsenzübung, 26/30. 5. 97

■ Aufgabe 1)

In sphärischen Koordinaten werden Punkte im Raum durch $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $\vartheta \in (0, \pi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ parametrisiert. Wenn $\vec{r}$ der Vektor vom Ursprung zu einem Punkt ist, dann ist r der Betrag diese Vektors und ϑ ist der Winkel zwischen $\vec{r}$ und der z−Achse. Die Komponente von $\vec{r}$, die senkrecht auf der z−Achse steht schließt mit der x−Achse den Winkel φ ein. Auf folgendem Bild ist eine Oberfläche mit konstantem r gezeigt. Auf diese Oberfläche sind Linien mit konstantem ϑ und Linien mit konstantem φ eingezeichnet.

```
ParametricPlot3D[
{Sin[ϑ] Cos[φ], Sin[ϑ] Sin[φ], Cos[ϑ]},
{ϑ, 0, Pi}, {φ, 0, 2 Pi}]
```



- Graphics3D -

■ **a)**

Drücken sie den Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ als Funktion von `r`, ϑ und φ aus. Berechnen Sie auch die inverse Transformation indem Sie `r`, ϑ und φ durch `x`, `y` und `z` ausdrücken. Warum wurde `r=0` und $\vartheta \in \{0, \pi\}$ ausgeschlossen?

■ **Lösung:**

```
r⃗ = r ( Sin[ϑ] Cos[φ]
       Sin[ϑ] Sin[φ]
          Cos[ϑ]    ) // Flatten;
```

$r = x^2 + y^2 + z^2$

$\vartheta = \text{atan}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$

$\varphi = \text{atan}\left(\frac{x}{y}\right)$

Der Punkt `r=0` wurde ausgeschlossen, da dort ϑ und φ nicht eindeutig sind, die `z`−Achse wurde ausgeschlossen, da dort φ nicht eindeutig ist.

■ **b)**

Berechnen Sie die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenlinien im spherischen Koordinatensystem. Berechnen Sie dann den Normalenvektor $\vec{t}_n$ auf der Kugel und den dazugehörigen differentiellen Oberflächenvektor $d\vec{f}$. Berechnen Sie danach das Volumenelement `dV` in Kugelkoordinaten.

■ **Lösung:**

```
t⃗r = ∂r r⃗; MatrixForm[t⃗r]
```

```
( Cos[φ] Sin[ϑ] )
( Sin[ϑ] Sin[φ] )
(    Cos[ϑ]     )
```

```
t⃗ϑ = ∂ϑ r⃗; MatrixForm[t⃗ϑ]
```

```
( r Cos[ϑ] Cos[φ] )
( r Cos[ϑ] Sin[φ] )
(   -r Sin[ϑ]     )
```

```
t⃗φ = ∂φ r⃗; MatrixForm[t⃗φ]
```

```
( -r Sin[ϑ] Sin[φ] )
(  r Cos[φ] Sin[ϑ] )
(         0        )
```

Die zugehörigen Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenlinien sind

$\hat{e}_r$ entlang der Koordinatenline mit festem ϑ und φ,

$\hat{e}_\vartheta$ entlang der Koordinatenline mit festem r und φ,

$\hat{e}_\varphi$ entlang der Koordinatenlinie mit festem r und ϑ.

$$\hat{e}_r = \hat{t}_r; \quad \hat{e}_\vartheta = \frac{1}{r}\,\hat{t}_\vartheta; \quad \hat{e}_\varphi = \frac{1}{r\,\mathrm{Sin}[\vartheta]}\,\hat{t}_\varphi;$$

```
ê_ϑ . ê_φ
```

```
0
```

```
Cross[ê_ϑ, ê_φ] // Simplify // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Cos}[\varphi]\,\mathrm{Sin}[\vartheta] \\ \mathrm{Sin}[\vartheta]\,\mathrm{Sin}[\varphi] \\ \mathrm{Cos}[\vartheta] \end{pmatrix}$$

Wegen $\hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_\vartheta = 0$ und $\hat{e}_r = \hat{e}_\vartheta \times \hat{e}_\varphi$ bilden die Einheitsvektoren in der Reihenfolge $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\vartheta$, $\hat{e}_\varphi$ ein rechtshändiges orthogonales Dreibein.

$$d\vec{f} = \hat{t}_\vartheta \times \hat{t}_\varphi \, d\vartheta d\varphi = \hat{e}_r \, r^2 \sin(\vartheta)\, d\vartheta d\varphi$$

$$dV = d\vec{f} \cdot \hat{e}_r \, dr = r^2 \sin(\vartheta)\, dr d\vartheta d\varphi$$

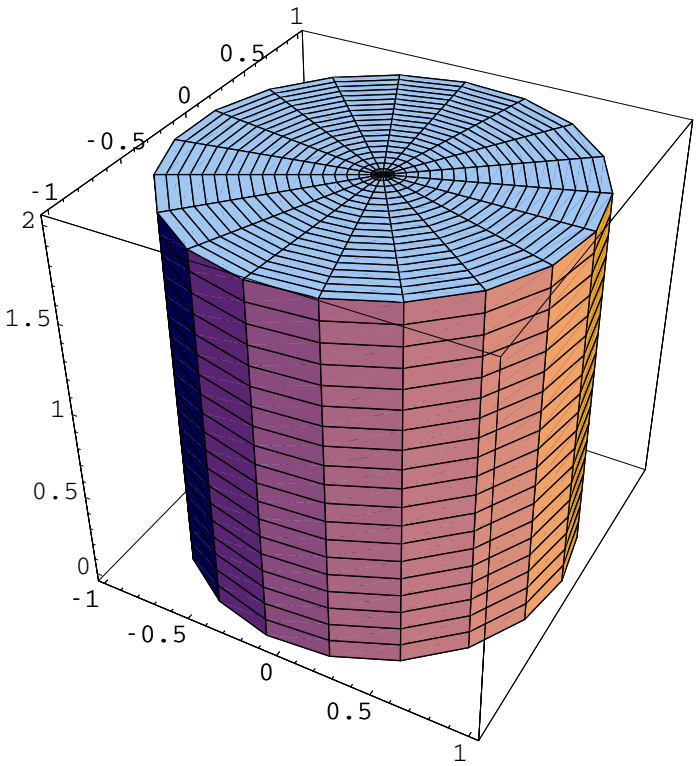
Man sollte nicht vergessen, die verwendeten Variablen am Ende jeder Aufgabe zu initialisieren.

```
r⃗ =.; t̂_r =.; t̂_ϑ =.; t̂_φ =.; ê_r =.; ê_ϑ =.; ê_φ =.
```

■ Aufgabe 2)

In Zylinderkoordinaten werden Punkte im Raum durch $\varrho \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $z \in \mathbb{R}$ parametrisiert. Wenn $\hat{r}$ der Vektor vom Ursprung zu einem Punkt ist, dann ist z die Projektion von $\vec{r}$ auf die z–Achse. Die Komponente von $\hat{r}$, die senkrecht auf der z–Achse steht schließt mit der x–Achse den Winkel φ ein und hat den Betrag ϱ. Auf folgendem Bild ist eine Oberfläche mit konstantem ϱ gezeigt. Auf diese Oberfläche sind Linien mit konstantem φ und Linien mit konstantem z eingezeichnet.

```
ParametricPlot3D[
 {{z Cos[φ], z Sin[φ], 2}, {z Cos[φ], z Sin[φ], 0}, {Cos[φ], Sin[φ], 2 z}},
 {φ, 0, 2 Pi}, {z, 0, 1}]
```



- Graphics3D -

■ **a)**

Drücken sie den Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ als Funktion von ϱ, φ und z aus. Berechnen Sie auch die inverse Transformation indem Sie ϱ, φ und z durch x, y und z ausdrücken. Warum wurde $\varrho=0$ ausgeschlossen?

■ **Lösung:**

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \varrho \cos[\varphi] \\ \varrho \sin[\varphi] \\ z \end{pmatrix} \text{ // Flatten;}$$

$\varrho = x^2 + y^2$

$\varphi = \text{atan}\left(\frac{x}{y}\right)$

$z = z$

Die z−Achse mit $\varrho=0$ wurde ausgeschlossen, da dort φ nicht eindeutig ist.

■ b)

Berechnen Sie die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenlinien im Zylinderkoordinatensystem. Berechnen Sie dann den Normalenvektor $\vec{t}_n$ auf einem Zylindermantel und den dazugehörigen differentiellen Oberflächenvektor $d\,\vec{f}$. Berechnen Sie danach das Volumenelement dV in Zylinderkoordinaten.

■ Lösung:

```
t_ϱ = ∂_ϱ r; MatrixForm[t_ϱ]
```

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}[\varphi] \\ \text{Sin}[\varphi] \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
t_φ = ∂_φ r; MatrixForm[t_φ]
```

$$\begin{pmatrix} -\varrho\,\text{Sin}[\varphi] \\ \varrho\,\text{Cos}[\varphi] \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
t_z = ∂_z r; MatrixForm[t_z]
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die zugehörigen Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenlinien sind

$\vec{e}_\varrho$ entlang der Koordinatenline mit festem φ und z,

$\vec{e}_\varphi$ entlang der Koordinatenline mit festem ϱ und z,

$\vec{e}_z$ entlang der Koordinatenline mit festem ϱ und φ.

```
e_ϱ = t_ϱ;  e_φ = 1/ϱ t_φ;  e_z = t_z;
```

```
e_ϱ . e_φ
```

0

```
Cross[e_ϱ, e_φ] // Simplify // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wegen $\vec{e}_\varrho \cdot \vec{e}_\varphi = 0$ und $\vec{e}_z = \vec{e}_\varrho \times \vec{e}_\varphi$ bilden die Einheitsvektoren in der Reihenfolge $\vec{e}_\varrho$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$ ein rechtshändiges orthogonales Dreibein.

$d\vec{f} = \vec{t}_\varphi \times \vec{t}_z \, d\vartheta d\varphi = \vec{e}_\varrho \, \varrho d\varphi dz$

$dV = d\vec{f} \cdot \vec{e}_\varrho \, d\varrho = \varrho d\varrho d\varphi dz$

Man sollte nicht vergessen, die verwendeten Variablen am Ende jeder Aufgabe zu initialisieren.

```
r = .; t_ϱ = .; t_φ = .; t_z = .; e_ϱ = .; e_φ = .; e_z = .
```

■ 7. Hausübung, 3. 6. 97

■ Aufgabe 1)

Gegeben sei die skalare Funktion

$$f[x\_, y\_] := \frac{x\,y}{(x^2 + y^2)^2}$$

Diese Funktion beschreibt das Potential eines ebenen elektrischen Quadrupols.

■ a)

Man entwickle diese Funktion um den Punkt `(a, b)` in ein Taylorpolynom bis zu Gliedern zweiter Ordnung in den Termen $\Delta_x = x - a$ und $\Delta_y = y - b$.

■ Lösung:

```
g[s_] := f[a + s Δx, b + s Δy]
Normal[Series[g[s], {s, 0, 2}]] /. s -> 1 // Simplify
```

$$\frac{1}{(a^2 + b^2)^4}\left(6\,a\,b\,(a^2 - b^2)\,\Delta_x^2 + \Delta_x\,(-3\,a^4\,b - 2\,a^2\,b^3 + b^5 - 3\,(a^4 - 6\,a^2\,b^2 + b^4)\,\Delta_y) + a\left(b\,(a^2 + b^2)^2 + (a^4 - 2\,a^2\,b^2 - 3\,b^4)\,\Delta_y + (-6\,a^2\,b + 6\,b^3)\,\Delta_y^2\right)\right)$$

■ b)

Wie groß ist die Krümmung der Feldlinien? Zur Berechnung verwende man die Lösung aus einer vorherigen Präsenzübung für den Tangentenvektor von Feldlinien $\vec{e}_t$ und für die Krümmung κ

$$\vec{e}_t = \frac{\vec{\nabla} f}{\left|\vec{\nabla} f\right|}\,; \quad \kappa = \left|\left(\vec{e}_t \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{e}_t\right|;$$

Welche Feldlinien sind demnach Geraden?

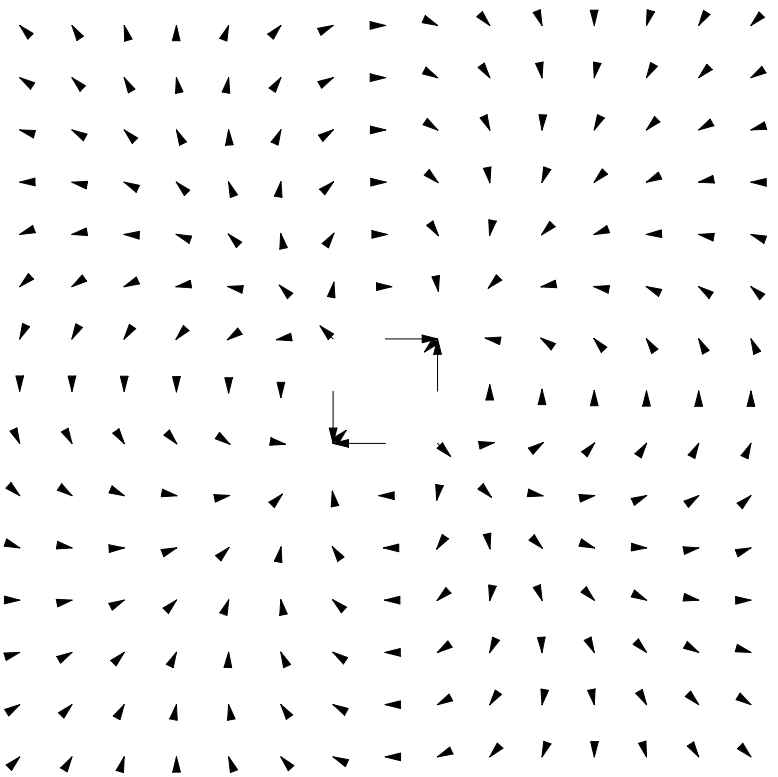
■ Lösung:

Um sich ein Bild von den Feldlinien zu machen, kann man wie in einer vorherigen Präsenzübung den Gradient von f(x,y) mittels PlotVektorField darstellen. Dazu muß zunächst ein Paket eingeladen werden.

```
<< Graphics'PlotField'
```

PlotVektorField verarbeitet ein zweidimensionales Vektorfeld in der Form $\vec{g}$ = {g_x, g_y}.

```
g⃗ = {∂x f[x, y], ∂y f[x, y]};
Off[Power::"infy", ∞::"indet"]
PlotVectorField[g⃗, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
On[Power::"infy", ∞::"indet"]
```



```
- Graphics -
```

Folgendes Paket wurde schoneinmal verwendet:

```
<< Calculus'VectorAnalysis'
```

Die Variablen x und y werden in diesem Paket als Xx und Yy bezeichnet.

```
∇f = Grad[f[Xx, Yy]];
e⃗t = ∇f / √(∇f . ∇f) // Simplify;
```

Die i−te Komponenten des Tangentenvektors wird durch et[[i]] bezeichnet. Die einzelnen Komponenten von $\left(\vec{e}_t \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{e}_t$ sind also

```
κ1 = ê_t . Grad[ê_t[[1]]] // Simplify;
κ2 = ê_t . Grad[ê_t[[2]]] // Simplify;
κ3 = ê_t . Grad[ê_t[[3]]] // Simplify;
```

Die Krümmung ergibt sich dann durch den Betrag des Vektors $\left(\hat{e}_t \cdot \vec{\nabla}\right) \hat{e}_t$. Dabei ersetzen wir nun `Xx` und `Yy` mittels `. /{Xx->x,Yy->y}` wieder durch `x` und `y`.

```
κ = Sqrt[κ1^2 + κ2^2 + κ3^2] /. {Xx -> x, Yy -> y} // Simplify
```

$$3\sqrt{\frac{(x^2 - y^2)^2}{(x^2 + y^2)^3}}$$

■ **c)**

Wie groß ist die Krümmung der Potential– oder Niveaulinien `f(x,y)=C=const`.? Dazu zeige man zunächst, daß im allgemeinen Fall für den Tangentialvektor der Potentiallinien gilt $\hat{e}_t = \hat{e}_z \times \frac{\vec{\nabla} f}{\left|\vec{\nabla} f\right|}$ und daß man die Krümmung $\kappa = \left|\left(\hat{e}_t \cdot \vec{\nabla}\right) \hat{e}_t\right|$ vereinfachen kann zu

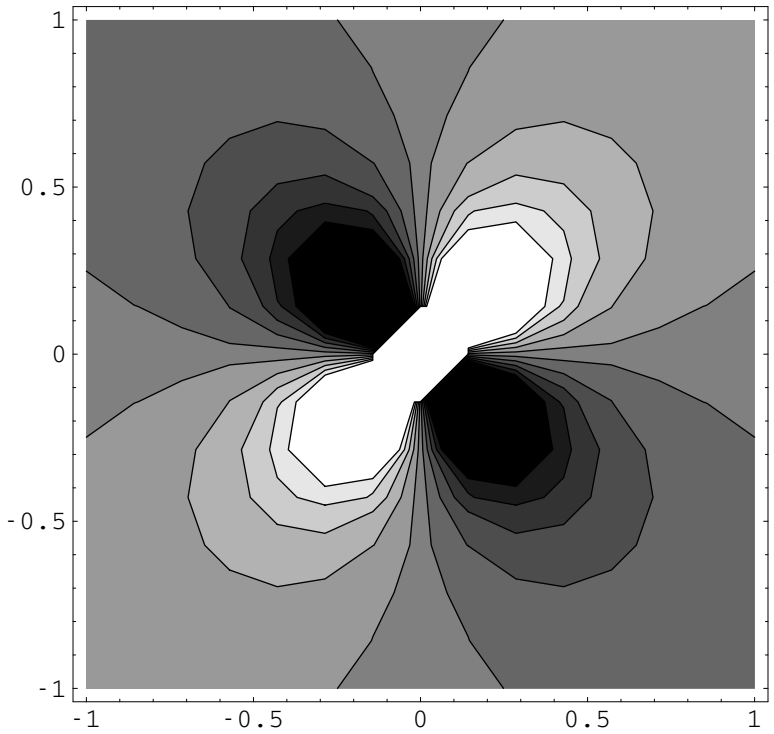
$$\kappa = -\left(\frac{\vec{\nabla} f}{\left|\vec{\nabla} f\right|}\right)\left(\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{\nabla} f}{\left|\vec{\nabla} f\right|}\right)\right).$$

Welche Potentiallinien sind demnach Geraden? Man skizziere die Potentiallinien `C=0`, `C=1/4` und `C=-1/4` .

■ **Lösung:**

Zunächst ist es sinnvoll, sich den ungefähren Verlauf der Potentiallinien klar zu machen.

```
ContourPlot[f[x, y], {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
```




```
- ContourGraphics -
```

Der Gradient $\vec{\nabla} f(x, y)$ steht senkrecht auf der Potentiallinie am Punkt (x,y). Weiterhin steht $\hat{e}_z$ senkrecht auf der x–y–Ebene und daher auch senkrecht auf den Potentiallinien. Der Tangentenvektor $\hat{e}_t$ der Potentiallinie am Punkt (x,y) ist daher $\hat{e}_t = \hat{e}_z \times \frac{\vec{\nabla} f}{\left|\vec{\nabla} f\right|}$. Die Krümmung ist gemäß der Frenetschen Formeln gegeben durch $\kappa = \left|\left(\hat{e}_t \cdot \vec{\nabla}\right) \hat{e}_t\right|$. An dieser Gleichung kann man nun einige Umformungen vornehmen. Dafür schreiben wir

$\vec{g} = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix} = \frac{\vec{\nabla} f}{\left|\vec{\nabla} f\right|}$ und berücksichtigen, daß $g_x^2 + g_y^2 = 1$ und damit $g_y\, \partial_x\, g_y = -g_x\, \partial_x\, g_x$.

$$\left(\hat{e}_t \cdot \vec{\nabla}\right) \hat{e}_t = \left(\left(\hat{e}_z \times \frac{\vec{\nabla} f}{|\vec{\nabla} f|}\right) \cdot \vec{\nabla}\right) \left(\hat{e}_z \times \frac{\vec{\nabla} f}{|\vec{\nabla} f|}\right) = \left(\begin{pmatrix} -g_y \\ g_x \end{pmatrix} \cdot \vec{\nabla}\right) \begin{pmatrix} -g_y \\ g_x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} g_y\, \partial_x\, g_y - g_x\, \partial_y\, g_y \\ g_x\, \partial_y\, g_x - g_y\, \partial_x\, g_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g_x\, \partial_x\, g_x - g_x\, \partial_y\, g_y \\ -g_y\, \partial_y\, g_y - g_y\, \partial_x\, g_x \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix} \left(\vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix}\right)$$

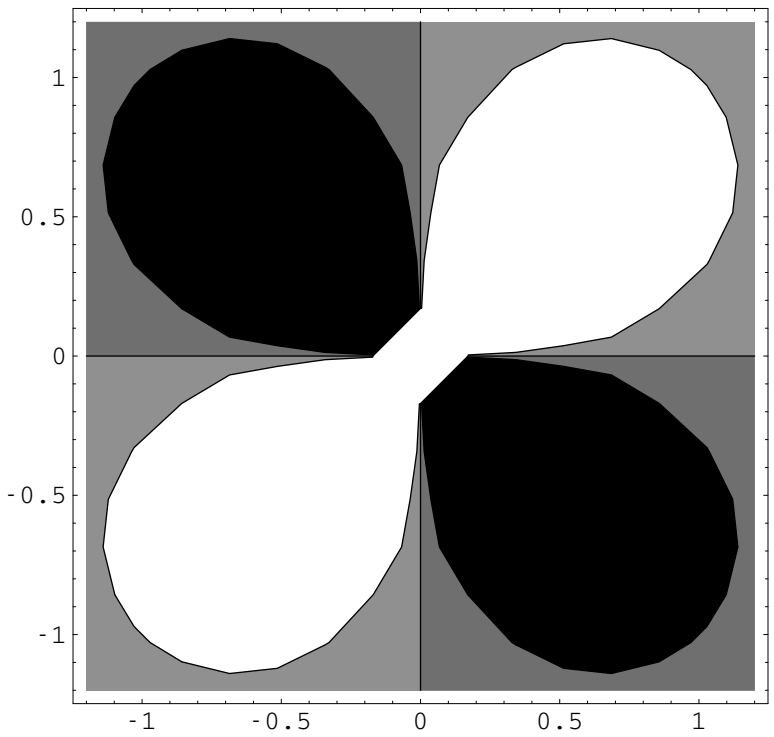
$$\kappa = \left|\vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix}\right| = |\partial_x\, g_x + \partial_y\, g_y|$$

```
d = 1 / Sqrt[(∂x f[x, y])^2 + (∂y f[x, y])^2] // Simplify;
gx = d ∂x f[x, y] // Simplify;
gy = d ∂y f[x, y] // Simplify;
κ = Sqrt[(∂x gx + ∂y gy)^2] // Simplify
```

$$6 \sqrt{\frac{x^2\, y^2}{(x^2 + y^2)^3}}$$

Die Krümmung ist daher mit `f(x,y)` verknüpft über κ = `6 f (x, y)` $\sqrt{x^2 + y^2}$. Für Geraden ist κ=0, daher ist nur die Potentiallinie `f(x,y)=0` eine Gerade. Die Potentiallinien für `f(x,y)=C` mit `C=-1/4, C=0` und `C=1/4` erhält man, indem man bei dem Befehlt ContourPlot angibt, bei welchen Funktionswerten die Kontur gezogen wird.

```
ContourPlot[f[x , y], {x, -1.2, 1.2}, {y, -1.2, 1.2}, Contours -> {-1 / 4, 0, 1 / 4}]
```




```
- ContourGraphics -
```

Man sollte nicht vergessen, die verwendeten Variablen am Ende jeder Aufgabe zu initialisieren.

```
f[a_, b_] =.; g[a_] =.; ê_t =.; κ =.; ĝ =.; ∇f =.; κ_1 =.; κ_2 =.; κ_3 =.; d =.;
g_x =.; g_y =.
```

■ 7. Präsenzübung, 5/6. 6. 97

■ Aufgabe 1)

Die Einheitsvektoren für Kugelkoordinaten wurden in einer vorherigen Präsenzübung berechnet

$$\hat{e}_r = \begin{pmatrix} \text{Sin}[\vartheta]\,\text{Cos}[\varphi] \\ \text{Sin}[\vartheta]\,\text{Sin}[\varphi] \\ \text{Cos}[\vartheta] \end{pmatrix}; \quad \hat{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \text{Cos}[\vartheta]\,\text{Cos}[\varphi] \\ \text{Cos}[\vartheta]\,\text{Sin}[\varphi] \\ -\text{Sin}[\vartheta] \end{pmatrix}; \quad \hat{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\text{Sin}[\varphi] \\ \text{Cos}[\varphi] \\ 0 \end{pmatrix};$$

■ a)

Berechnen Sie, die ersten partiellen Ableitungen der Einheitsvektoren.

■ Lösung:

$\partial_r \vec{e}_r = 0$, $\partial_\vartheta \vec{e}_r = \vec{e}_\vartheta$, $\partial_\varphi \vec{e}_r = \sin(\vartheta)\, \vec{e}_\varphi$,

$\partial_r \vec{e}_\vartheta = 0$, $\partial_\vartheta \vec{e}_\vartheta = -\vec{e}_r$, $\partial_\varphi \vec{e}_\vartheta = \cos(\vartheta)\, \vec{e}_\varphi$,

$\partial_r \vec{e}_\varphi = 0$, $\partial_\vartheta \vec{e}_\varphi = 0$, $\partial_\varphi \vec{e}_\varphi = -\sin(\vartheta)\, \vec{e}_r - \cos(\vartheta)\, \vec{e}_\vartheta$.

■ b)

In kartesischen Koordinaten hat der Gradient die Darstellung $\mathrm{grad}(f(\vec{r})) = \vec{e}_x\, \partial_x f + \vec{e}_y\, \partial_y f + \vec{e}_z\, \partial_z f$. In krummlinigen Koordinaten, wie zum Beispiel in spherischen Koordinaten, ist die Darstellung vom Gradienten, wie auch von der Rotation und der Divergenz, nicht ganz so einfach. Gegeben sie eine Funktion $f(r, \vartheta, \varphi)$. Man Berechne den Gradienten $\mathrm{grad}(f) = \vec{e}_r\, G_r + \vec{e}_\vartheta\, G_\vartheta + \vec{e}_\varphi\, G_\varphi$ in spherischen Koordinaten. Die Taylorentwicklung von $f(r, \vartheta, \varphi)$ in erster Ordnung ist $f(r_0, \vartheta_0, \varphi_0) + (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{\nabla} f(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$. Aus dieser Darstellung läßt sich der $\vec{\nabla}$−Operator berechnen. Gegeben sei weiterhin ein Vektorfeld $\vec{w}(r, \vartheta, \varphi) = \vec{e}_r\, w_r + \vec{e}_\vartheta\, w_\vartheta + \vec{e}_\varphi\, w_\varphi$. Man berechne die Divergenz $\mathrm{div}(\vec{w})$ und die Rotation $\mathrm{rot}(\vec{w}) = \vec{e}_r\, R_r + \vec{e}_\vartheta\, R_\vartheta + \vec{e}_\varphi\, R_\varphi$. Weiterhin berechne man den Laplace Operator $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f(\vec{r})))$ in spherischen Koordinaten.

■ Lösung:

Aus der ersten Ordnung des Taylorpolynoms folgt $(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{\nabla} f = \Delta_r\, \partial_r f + \Delta_\vartheta\, \partial_\vartheta f + \Delta_\varphi\, \partial_\varphi f$ wobei bis zur ersten Ordnung gilt $(\vec{r} - \vec{r}_0) = \Delta_r\, \partial_r \vec{r} + \Delta_\vartheta\, \partial_\vartheta \vec{r} + \Delta_\varphi\, \partial_\varphi \vec{r} = \Delta_r\, \vec{t}_r + \Delta_\vartheta\, \vec{t}_\vartheta + \Delta_\varphi\, \vec{t}_\varphi$. Da die Vektoren $\vec{t}_r$, $\vec{t}_\vartheta$ und $\vec{t}_\varphi$ orthogonal zueinander sind gilt für den $\vec{\nabla}$−Operator

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r\, \partial_r + \frac{1}{r}\, \vec{e}_\vartheta\, \partial_\vartheta + \frac{1}{r \sin(\vartheta)}\, \vec{e}_\varphi\, \partial_\varphi$$

$$\mathrm{grad}(f) = \vec{e}_r\, \partial_r f + \frac{1}{r}\, \vec{e}_\vartheta\, \partial_\vartheta f + \frac{1}{r \sin(\vartheta)}\, \vec{e}_\varphi\, \partial_\varphi f$$

$$\mathrm{div}(\vec{w}) = \left(\vec{e}_r\, \partial_r f + \frac{1}{r}\, \vec{e}_\vartheta\, \partial_\vartheta f + \frac{1}{r \sin(\vartheta)}\, \vec{e}_\varphi\, \partial_\varphi f\right) \cdot (\vec{e}_r\, w_r + \vec{e}_\vartheta\, w_\vartheta + \vec{e}_\varphi\, w_\varphi)$$

$$= \partial_r w_r + \frac{1}{r}\, \partial_\vartheta w_\vartheta + \frac{1}{r \sin(\vartheta)}\, \partial_\varphi w_\varphi + \frac{2}{r}\, w_r + \frac{\cos(\vartheta)}{r \sin(\vartheta)}\, w_\vartheta$$

$$= \frac{1}{r^2}\, \partial_r (r^2\, \partial_r w_r) + \frac{1}{r \sin(\vartheta)}\, \partial_\vartheta (\sin(\vartheta)\, w_\vartheta) + \frac{1}{r \sin(\vartheta)}\, \partial_\varphi w_\varphi$$

$$\text{rot}(\vec{w}) = \left(\vec{e}_r\,\partial_r + \frac{1}{r}\,\vec{e}_\vartheta\,\partial_\vartheta + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\,\vec{e}_\varphi\,\partial_\varphi\right) \times (\vec{e}_r\,w_r + \vec{e}_\vartheta\,w_\vartheta + \vec{e}_\varphi\,w_\varphi)$$

$$= \vec{e}_r \times (\vec{e}_\vartheta\,\partial_r w_\vartheta + \vec{e}_\varphi\,\partial_r w_\varphi) + \frac{1}{r}\,\vec{e}_\vartheta \times (\vec{e}_r\,(\partial_\vartheta w_r - w_\vartheta) + \vec{e}_\varphi\,\partial_\vartheta w_\varphi)$$

$$+ \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\,\vec{e}_\varphi \times (\vec{e}_r\,(\partial_\varphi w_r - \sin(\vartheta)\,w_\varphi) + \vec{e}_\vartheta\,(\partial_\varphi w_\vartheta - \cos(\vartheta)\,w_\varphi))$$

$$= \vec{e}_\varphi\,\partial_r w_\vartheta - \vec{e}_\vartheta\,\partial_r w_\varphi + \frac{1}{r}\,(-\vec{e}_\varphi\,(\partial_\vartheta w_r - w_\vartheta) + \vec{e}_r\,\partial_\vartheta w_\varphi)$$

$$+ \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\,(\vec{e}_\vartheta\,(\partial_\varphi w_r - \sin(\vartheta)\,w_\varphi) - \vec{e}_r\,(\partial_\varphi w_\vartheta - \cos(\vartheta)\,w_\varphi))$$

$$= \vec{e}_r\,\frac{1}{r\sin(\vartheta)}\,(\sin(\vartheta)\,\partial_\vartheta w_\varphi - \partial_\varphi w_\vartheta + \cos(\vartheta)\,w_\varphi)$$

$$+ \vec{e}_\vartheta\,\frac{1}{r\sin(\vartheta)}\,(\partial_\varphi w_r - \sin(\vartheta)\,w_\varphi - r\sin(\vartheta)\,\partial_r w_\varphi) + \vec{e}_\varphi\,\frac{1}{r}\,(r\,\partial_r w_\vartheta - \partial_\vartheta w_r + w_\vartheta)$$

$$= \vec{e}_r\,\frac{1}{r\sin(\vartheta)}\,(\partial_\vartheta\,(\sin(\vartheta)\,w_\varphi) - \partial_\varphi\,w_\vartheta)$$

$$+ \vec{e}_\vartheta\,\frac{1}{r\sin(\vartheta)}\,(\partial_\varphi\,w_r - \sin(\vartheta)\,\partial_r\,(r\,w_\varphi)) + \vec{e}_\varphi\,\frac{1}{r}\,(\partial_r\,(r\,w_\vartheta) - \partial_\vartheta\,w_r)$$

$$\text{div}(\text{grad}(f)) = \left(\vec{e}_r\,\partial_r + \frac{1}{r}\,\vec{e}_\vartheta\,\partial_\vartheta + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\,\vec{e}_\varphi\,\partial_\varphi\right)$$

$$\cdot \left(\vec{e}_r\,\partial_r f + \frac{1}{r}\,\vec{e}_\vartheta\,\partial_\vartheta f + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\,\vec{e}_\varphi\,\partial_\varphi f\right)$$

$$= \partial_r{}^2 f + \frac{2}{r}\,\partial_r f + \frac{1}{r^2}\,\partial_\vartheta{}^2 f + \frac{\cos(\vartheta)}{r^2\sin(\vartheta)}\,\partial_\vartheta f + \frac{1}{r^2\sin(\vartheta)^2}\,\partial_\varphi{}^2 f$$

$$= \frac{1}{r^2}\,\partial_r\,(r^2\,\partial_r f) + \frac{1}{r^2\sin(\vartheta)}\,\partial_\vartheta\,(\sin(\vartheta)\,\partial_\vartheta f)$$

$$+ \frac{1}{r^2\sin(\vartheta)^2}\,\partial_\varphi{}^2 f$$

In *Mathematica* werden diese Beziehungen auch verwendet

```
Grad[f[r, ϑ, φ], Spherical[r, ϑ, φ]]
```

$$\left\{f^{(1,0,0)}[r, \vartheta, \varphi],\ \frac{f^{(0,1,0)}[r, \vartheta, \varphi]}{r},\ \frac{\text{Csc}[\vartheta]\,f^{(0,0,1)}[r, \vartheta, \varphi]}{r}\right\}$$

```
Div[{w_r[r, ϑ, φ], w_ϑ[r, ϑ, φ], w_φ[r, ϑ, φ]} // Flatten, Spherical[r, ϑ, φ]] // Simplify
```

$$\frac{1}{r}\,(2\,w_r[r, \vartheta, \varphi] + \text{Cot}[\vartheta]\,w_\vartheta[r, \vartheta, \varphi] + \text{Csc}[\vartheta]\,w_\varphi^{(0,0,1)}[r, \vartheta, \varphi] + w_\vartheta^{(0,1,0)}[r, \vartheta, \varphi] + r\,w_r^{(1,0,0)}[r, \vartheta, \varphi])$$

```
Curl[{w_r[r, ϑ, φ], w_ϑ[r, ϑ, φ], w_φ[r, ϑ, φ]}] // Flatten, Spherical[r, ϑ, φ]] // Simplify // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \frac{\text{Cot}[\vartheta]\, w_\varphi[r,\vartheta,\varphi] - \text{Csc}[\vartheta]\, w_\vartheta^{(0,0,1)}[r,\vartheta,\varphi] + w_\varphi^{(0,1,0)}[r,\vartheta,\varphi]}{r} \\ -\frac{w_\varphi[r,\vartheta,\varphi] - \text{Csc}[\vartheta]\, w_r^{(0,0,1)}[r,\vartheta,\varphi] + r\, w_\varphi^{(1,0,0)}[r,\vartheta,\varphi]}{r} \\ \frac{w_\vartheta[r,\vartheta,\varphi] - w_r^{(0,1,0)}[r,\vartheta,\varphi] + r\, w_\vartheta^{(1,0,0)}[r,\vartheta,\varphi]}{r} \end{pmatrix}$$

```
Laplacian[f[r, ϑ, φ], Spherical[r, ϑ, φ]] // Simplify
```

$$\frac{1}{r^2}\left(\text{Csc}[\vartheta]^2\, f^{(0,0,2)}[r,\vartheta,\varphi] + \text{Cot}[\vartheta]\, f^{(0,1,0)}[r,\vartheta,\varphi] + f^{(0,2,0)}[r,\vartheta,\varphi] + 2\, r\, f^{(1,0,0)}[r,\vartheta,\varphi] + r^2\, f^{(2,0,0)}[r,\vartheta,\varphi]\right)$$

■ Aufgabe 2)

Die Einheitsvektoren für Zylinderkoordinaten wurden in einer vorherigen Präsenzübung berechnet

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \text{Cos}[\varphi] \\ \text{Sin}[\varphi] \\ 0 \end{pmatrix};\quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\text{Sin}[\varphi] \\ \text{Cos}[\varphi] \\ 0 \end{pmatrix};\quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

■ a)

Berechnen Sie, die ersten partiellen Ableitungen der Einheitsvektoren.

■ Lösung:

$\partial_\varrho\, \vec{e}_\varrho = 0$, $\partial_\varphi\, \vec{e}_\varrho = \vec{e}_\varphi$, $\partial_z\, \vec{e}_\varrho = 0$,

$\partial_\varrho\, \vec{e}_\varphi = 0$, $\partial_\varphi\, \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_\varrho$, $\partial_z\, \vec{e}_\varphi = 0$,

$\partial_\varrho\, \vec{e}_z = 0$, $\partial_\varphi\, \vec{e}_z = 0$, $\partial_z\, \vec{e}_z = 0$.

■ b)

Gegeben sie eine Funktion `f(ϱ, φ, z)`. Man Berechne den Gradienten $\text{grad}(f) = \vec{e}_\varrho\, G_\varrho + \vec{e}_\varphi\, G_\varphi + \vec{e}_z\, G_z$ in Zylinderkoordinaten. Gegeben sei weiterhin ein Vektorfeld $\vec{w}(\varrho, \varphi, z) = \vec{e}_\varrho\, w_\varrho + \vec{e}_\varphi\, w_\varphi + \vec{e}_z\, w_z$. Man berechne für dieses Vektorfeld die Divergenz $\text{div}(\vec{w})$ und die Rotation $\text{rot}(\vec{w}) = \vec{e}_\varrho\, R_\varrho + \vec{e}_\varphi\, R_\varphi + \vec{e}_z\, R_z$. Weiterhin berechne man den Laplace Operator $\text{div}(\text{grad}(f(\vec{r})))$ in Zylinderkoordinaten.

■ **Lösung:**

$$\text{grad}(f) = \frac{\vec{t}_\varrho}{\vec{t}_\varrho^{\,2}}\,\partial_\varrho\, f + \frac{\vec{t}_\varphi}{\vec{t}_\varphi^{\,2}}\,\partial_\varphi\, f + \frac{\vec{t}_z}{\vec{t}_z^{\,2}}\,\partial_z f = \vec{e}_\varrho\,\partial_\varrho\, f + \frac{1}{\varrho}\,\vec{e}_\varphi\,\partial_\varphi\, f + \vec{e}_z\,\partial_z f$$

$$\text{div}(\vec{w}) = \left(\vec{e}_\varrho\,\partial_\varrho + \frac{1}{\varrho}\,\vec{e}_\varphi\,\partial_\varphi + \vec{e}_z\,\partial_z\right)\,(\vec{e}_\varrho\, v_\varrho + \vec{e}_\varphi\, v_\varphi + \vec{e}_z\, v_z)$$

$$= \partial_\varrho\, w_\varrho + \frac{1}{\varrho}\,\partial_\varphi\, w_\varphi + \partial_z\, w_z + \frac{1}{\varrho}\, w_\varrho = \frac{1}{\varrho}\,\partial_\varrho\,(\varrho\,\partial_\varrho\, w_\varrho) + \frac{1}{\varrho}\,\partial_\varphi\, w_\varphi + \partial_z\, w_z$$

$$\text{rot}(\vec{w}) = \left(\vec{e}_\varrho\,\partial_\varrho + \frac{1}{\varrho}\,\vec{e}_\varphi\,\partial_\varphi + \vec{e}_z\,\partial_z\right) \times (\vec{e}_\varrho\, w_\varrho + \vec{e}_\varphi\, w_\varphi + \vec{e}_z\, w_z)$$

$$= \vec{e}_\varrho \times (\vec{e}_\varphi\,\partial_\varrho\, w_\varphi + \vec{e}_z\,\partial_\varrho\, w_z) + \frac{1}{\varrho}\,\vec{e}_\varphi \times (\vec{e}_\varrho\,(\partial_\varphi\, w_\varrho - w_\varphi) + \vec{e}_z\,\partial_\varphi\, w_z)$$

$$+ \vec{e}_z \times (\vec{e}_\varrho\,\partial_z\, w_\varrho + \vec{e}_\varphi\,\partial_z\, w_\varphi)$$

$$= \vec{e}_z\,\partial_\varrho\, w_\varphi - \vec{e}_\varphi\,\partial_\varrho\, w_z + \frac{1}{\varrho}\,(-\vec{e}_z\,(\partial_\varphi\, w_\varrho - w_\varphi) + \vec{e}_\varrho\,\partial_\varphi\, w_z) + \vec{e}_\varphi\,\partial_z\, w_\varrho - \vec{e}_\varrho\,\partial_z\, w_\varphi$$

$$= \vec{e}_\varrho\left(\frac{1}{\varrho}\,\partial_\varphi\, w_z - \partial_z\, w_\varphi\right) + \vec{e}_\varphi\,(\partial_z\, w_\varrho - \partial_\varrho\, w_z) + \vec{e}_z\left(\frac{1}{\varrho}\,\partial_\varrho\,(\varrho\, w_\varphi) - \frac{1}{\varrho}\,\partial_\varphi\, w_\varrho\right)$$

$$\text{div}(\text{grad}(f)) = \left(\vec{e}_\varrho\,\partial_\varrho + \frac{1}{\varrho}\,\vec{e}_\varphi\,\partial_\varphi + \vec{e}_z\,\partial_z\right) \cdot \left(\vec{e}_\varrho\,\partial_\varrho\, f + \frac{1}{\varrho}\,\vec{e}_\varphi\,\partial_\varphi\, f + \vec{e}_z\,\partial_z f\right)$$

$$= \partial_\varrho^{\,2} f + \frac{1}{\varrho}\,\partial_\varrho f + \frac{1}{\varrho^2}\,\partial_\varphi^{\,2} f + \partial_z^{\,2} f = \frac{1}{\varrho}\,\partial_\varrho\,(\varrho\,\partial_\varrho\, f) + \frac{1}{\varrho^2}\,\partial_\varphi^{\,2}\, f + \partial_z^{\,2}\, f$$

In *Mathematica* werden diese Beziehungen auch verwendet

```
Grad[f[ϱ, φ, z], Cylindrical[ϱ, φ, z]]
```

$$\left\{f^{(1,0,0)}[\varrho, \varphi, z],\ \frac{f^{(0,1,0)}[\varrho, \varphi, z]}{\varrho},\ f^{(0,0,1)}[\varrho, \varphi, z]\right\}$$

```
Div[{{wϱ[ϱ, φ, z]}, {wφ[ϱ, φ, z]}, {wz[ϱ, φ, z]}}] // Flatten, Cylindrical[ϱ, φ, z]] // Simplify
```

$$\frac{w_\varrho[\varrho, \varphi, z] + \varrho\, w_z^{(0,0,1)}[\varrho, \varphi, z] + w_\varphi^{(0,1,0)}[\varrho, \varphi, z] + \varrho\, w_\varrho^{(1,0,0)}[\varrho, \varphi, z]}{\varrho}$$

```
Curl[{{wϱ[ϱ, φ, z]}, {wφ[ϱ, φ, z]}, {wz[ϱ, φ, z]}}] // Flatten, Cylindrical[ϱ, φ, z]] // Simplify // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} -w_\varphi^{(0,0,1)}[\varrho, \varphi, z] + \frac{w_z^{(0,1,0)}[\varrho,\varphi,z]}{\varrho} \\ w_\varrho^{(0,0,1)}[\varrho, \varphi, z] - w_z^{(1,0,0)}[\varrho, \varphi, z] \\ \frac{w_\varphi[\varrho,\varphi,z] - w_\varrho^{(0,1,0)}[\varrho,\varphi,z] + \varrho\, w_\varphi^{(1,0,0)}[\varrho,\varphi,z]}{\varrho} \end{pmatrix}$$

```
Laplacian[f[ϱ, φ, z], Cylindrical[ϱ, φ, z]] // Simplify
```

$$f^{(0,0,2)}[\varrho, \varphi, z] + \frac{f^{(0,2,0)}[\varrho, \varphi, z]}{\varrho^2} + \frac{f^{(1,0,0)}[\varrho, \varphi, z]}{\varrho} + f^{(2,0,0)}[\varrho, \varphi, z]$$

■ 8. Hausübung, 10. 6. 97

■ Aufgabe 1)

Man verifiziere den Stokes'schen Satz mit dem Vektorfeld $\vec{w}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$

■ a)

für die Oberfläche der Halbkugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$.

■ Lösung:

Zunächst stellt man fest, daß sich das Vektorfeld in Kugelkoordinaten einfach schreibt als $\vec{w} = \vec{e}_\varphi$.
Die Rotation in Kugelkoordinaten wurde in einer vorherigen Präsenzübung hergeleitet.

$$\mathrm{rot}(\vec{w}) = \vec{e}_r \frac{1}{r \sin(\vartheta)} (\partial_\vartheta (\sin(\vartheta) w_\varphi) - \partial_\varphi w_\vartheta)$$

$$+ \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r \sin(\vartheta)} (\partial_\varphi w_r - \sin(\vartheta) \partial_r (r w_\varphi)) + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} (\partial_r (r w_\vartheta) - \partial_\vartheta w_r)$$

$$= \frac{\vec{e}_r \cos(\vartheta) - \vec{e}_\vartheta \sin(\vartheta)}{r \sin(\vartheta)} w_\varphi = \frac{\vec{e}_r \cos(\vartheta) - \vec{e}_\vartheta \sin(\vartheta)}{r \sin(\vartheta)}$$

Auch das differentielle Oberflächenelement einer Kugel wurde in einer vorherigen Präsenzübung hergeleitet: $d\vec{f} = \vec{e}_r r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi$. Das Oberflächenintegral $\int_{\mathrm{Halbkugelrot}} (\vec{w}) \cdot d\vec{f}$ ergibt sich also zu

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos(\vartheta) d\varphi d\vartheta = 2\pi \int_0^{\pi/2} d\sin(\vartheta) = 2\pi$$

Das Integral $\oint \vec{w} \cdot d\vec{s}$ über die Berandung ergibt ebenfalls $\int_0^{2\pi} \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi d\varphi = 2\pi$.

■ b)

für Kreisfläche $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$.

■ Lösung:

Auch in Zylinderkoordinaten läßt sich das Vektorfeld recht einfach schreiben als $\vec{w} = \vec{e}_\varphi$. Die bereits berechnete Rotation ergibt sich zu $\mathrm{rot}(\vec{w}) = \vec{e}_z / \varrho$. Unter verwendung des differentiellen Oberflächenelements $d\vec{f} = \vec{e}_z \varrho d\varrho d\varphi$ erhält man als Oberflächenintegral $\int \mathrm{rot}(\vec{w}) d\vec{f} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} d\varrho d\varphi = 2\pi$, welches wiederum mit dem Integral $\oint \vec{w} \cdot d\vec{s}$ übereinstimmt.

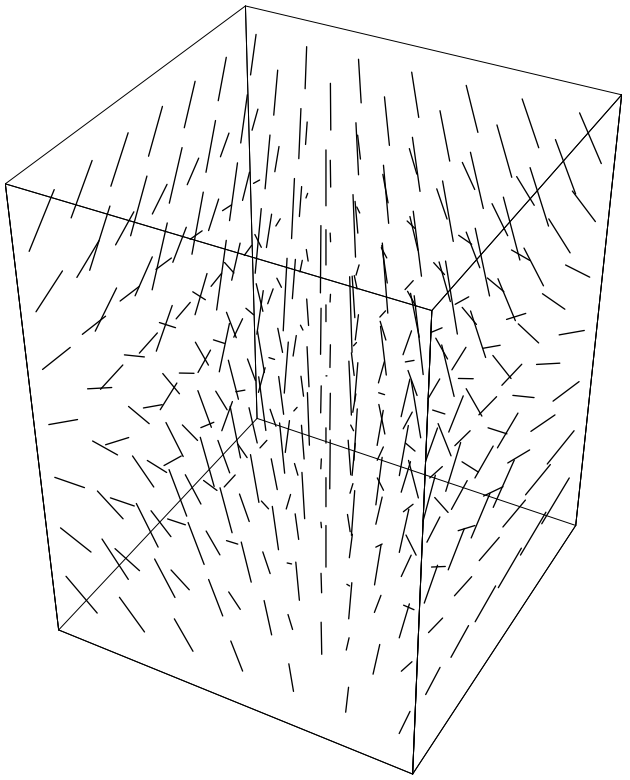
■ Aufgabe 2)

Projizieren Sie den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 3z \end{pmatrix}$ auf die Ebene $x = z$. Führen Sie in dieser Ebene Koordinaten ξ und y ein und berechnen Sie eine implizite Darstellung $f(\xi, y) = 0$ für die Feldlinien des projizierten Vektorfeldes in dieser Ebene.

■ Lösung:

Zunächst kann man versuchen sich ein Bild über das Vektorfeld zu machen

```
In[9]:= << Graphics'PlotField3D'
        PlotVectorField3D[{-x, -y, 3 z} // Flatten, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}]
```



```
Out[10]= - Graphics3D -
```

Zunächst führt man in der Ebene $x = z$ Einheitsvektoren ein. Es bieten sich die beiden Vektoren $\vec{e}_\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\vec{e}_y$ an. Senkrecht auf der Ebene steht der Vektor $\vec{e}_n = \vec{e}_\xi \times \vec{e}_y = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$. Nun benutzen wir diese Einheitsvektoren als Basis auf dieser Ebene $x = z$. Die Position eines Punktes auf dieser Ebene wird dann dargestellt durch $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \xi \vec{e}_\xi + y \vec{e}_y$ dargestellt. Daraus ergibt sich $\xi = x \left(\sqrt{2}\right)$. In dieser Basis schreibt sich das Vektorfeld

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 3\,x \end{pmatrix} = \hat{e}_\xi\, x\,\sqrt{2} - \hat{e}_y\, y + \hat{e}_n\, 2\,x\,\sqrt{2}\,.$$

Das auf die Fläche projizierte Vektorfeld ergibt sich demnach zu $\vec{w} = \hat{e}_\xi\, \xi - \hat{e}_y\, y$. Parametrisiert man die Feldlinien mit ξ, so erhält man als Tangentialrichtung $\partial_\xi\, \vec{r} = \hat{e}_\xi + \partial_\xi\, y\, \hat{e}_y$. Da diese Richtung parallel zum Vektorfeld ist gilt

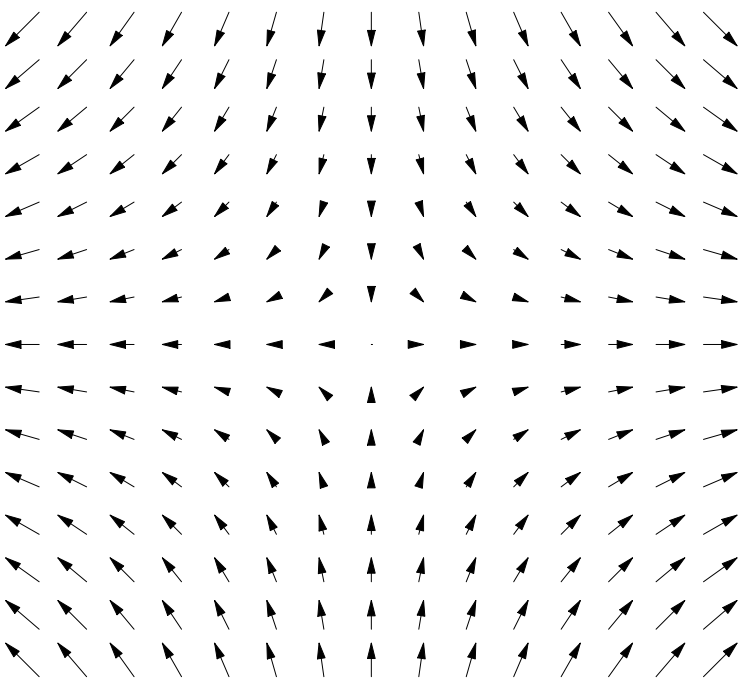
$$\vec{w} \times \partial_\xi\, \vec{r} = 0 = (\hat{e}_\xi\, \xi - \hat{e}_y\, y) \times (\hat{e}_\xi + \partial_\xi\, y\, \hat{e}_y) = (\xi\, \partial_\xi\, y + y)\, \hat{e}_n = 0.$$

Die Differentialgleichung löst man durch Integration

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\xi} &= -\frac{y}{\xi} \\ \int \frac{1}{y}\, dy &= -\int \frac{1}{\xi}\, d\xi \\ \ln(y) &= -\ln(\xi) + \text{const} \\ y &= \frac{\text{const}}{\xi} \end{aligned}$$

Die Feldlinien sind also Hyperbeln.

```
In[7]:= << Graphics`PlotField`
        PlotVectorField[{x, -y} // Flatten, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
```



```
Out[8]= - Graphics -
```

■ 8. Präsenzübung, 12/13. 6. 97

■ Aufgabe 1)

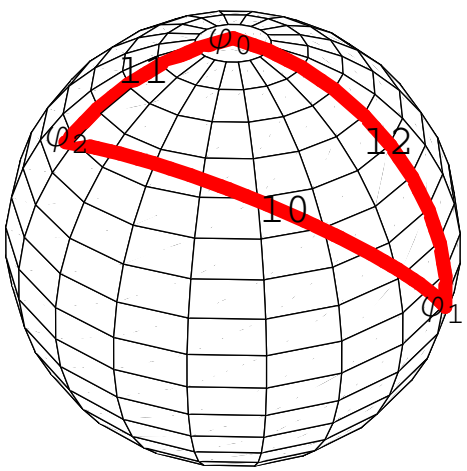
Gegeben seien drei Großkreise, die sich schneiden und wie abgebildet ein dreiecksähnliche Fläche auf einer Einheitskugel (Radius=1) bilden. Die Tangentenvektoren an den Ecken schließen die Winkel φ_0, φ_1, φ_2 ein. Die Längen der Seitenkurven der Dreiecksfläche seien l_0, l_1, l_2. Die Seite mit dem Index i liegt dem Winkel mit diesem Index gegenüber. Zeigen Sie, daß der Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie gilt

$$\cos(l_1) = \cos(l_0)\cos(l_2) + \sin(l_0)\sin(l_2)\cos(\varphi_0)$$

Es ist sinnvoll dabei den Eckpunkt mit Winkel φ_0 auf die z−Achse zu legen und Kugelkoordinaten zu verwenden.

In[4]:=

```
<< Graphics`Shapes`
sph = Sphere[1, 20, 20]; r = 1.01;
line1 = Line[Table[{r Sin[ϑ], 0, r Cos[ϑ]}, {ϑ, 0, π/2, 2 π/40}]];
line2 =
 Line[Table[{r Sin[ϑ] Cos[.9], r Sin[ϑ] Sin[.9], r Cos[ϑ]}, {ϑ, 35 2 π/40, 2 π, 2 π/40}]];
line3 = Line[
  Table[{r Sin[ϑ], r Cos[ϑ] Sin[2.45], r Cos[ϑ] Cos[2.45]}, {ϑ, π/2, 23 2 π/40, 2 π/40}]];
l0 = Text[StyleForm["l0", FontSize -> 16],
  {r Sin[16.5 2 π/40], r Cos[16.5 2 π/40] Sin[2.45], r Cos[16.5 2 π/40] Cos[2.45]}];
l1 = Text[StyleForm["l1", FontSize -> 16],
  {r Sin[37.5 2 π/40] Cos[.9], r Sin[37.5 2 π/40] Sin[.9], r Cos[37.5 2 π/40]}];
l2 = Text[StyleForm["l2", FontSize -> 16], {r/Sqrt[2], 0, r/Sqrt[2]}];
p0 = Text[StyleForm["φ0", FontSize -> 16], {0, 0, r}];
p1 = Text[StyleForm["φ1", FontSize -> 16], {r, 0, 0}];
p2 = Text[StyleForm["φ2", FontSize -> 16],
  {r Sin[35 2 π/40] Cos[.9], r Sin[35 2 π/40] Sin[.9], r Cos[35 2 π/40]}];
Show[Graphics3D[
  {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.02], line1, line2, line3}], Graphics3D[sph],
 Graphics3D[{p0, p1, p2, l0, l1, l2}], Boxed -> False, Shading -> False]
Clear[r, sph, line1, line2, line3, l0, l1, l2, p0, p1, p2]
```



Out[5]= - Graphics3D -

■ Lösung:

Sei $\vec{r}_i$ der Vektor vom Kugelmittelpunkt zu dem Eckpunkt mit Winkel φ_i.

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \sin(l_2) \\ 0 \\ \cos(l_2) \end{pmatrix} \; ; \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} \sin(l_1)\cos(\varphi_0) \\ \sin(l_1)\sin(\varphi_0) \\ \cos(l_1) \end{pmatrix} .$$

Die Vektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ schließen den Winkel l_0 ein. Damit folgt

$$\cos(l_0) = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \cos(l_1)\cos(l_2) + \sin(l_1)\sin(l_2)\cos(\varphi_0) .$$

■ Aufgabe 2)

Die sogenannte Diracsche Deltafunktion $\delta(x)$ hat für alle Funktionen $f(x)$ die Eigenschaften $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x - x_0)\,dx = f(x_0)$. Außerdem ist $\delta(x) = 0$ für $x \neq 0$. Da die Deltafunktion im üblichen Sinne keine Funktion ist, kann die Integration und die Ableitung hier nicht ordentlich definiert werden. Man kann aber stetige Funktionen angeben, die von einem kleinen Parameter ϵ abhängen und die Eigenschaften der Deltafunktion um so besser erfüllen, je kleiner dieser Parameter ist. Die Deltafunktion kann man sich dann durch den Grenzwert des Parameters gegen Null veranschaulichen.

Beispiel:

$$\delta_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } |x| > \epsilon \\ \frac{1}{2\epsilon} \text{ für } |x| < \epsilon \end{cases}$$

Damit ist $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(x)\,dx = 1$ und $\delta_\epsilon(x) = 0$, wenn x nicht in einer ϵ–Umgebung von 0 ist. Wenn sich die Funktion $f(x)$ in einem ϵ–Bereich um x_0 nicht stark ändert, gilt außerdem $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta_\epsilon(x - x_0)\,dx \approx f(x_0)$. Je kleiner ϵ ist, desto besser ist die Übereinstimmung.

■ a)

Zeigen sie, daß in diesem Sinne auch die folgenden zwei Funktionen sich für kleine ϵ der Deltafunktion nähern:
$\delta_\epsilon(x) = \frac{\epsilon}{\pi}\frac{1}{x^2+\epsilon^2}$; $\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-(x/\epsilon)^2}$.

■ Lösung:

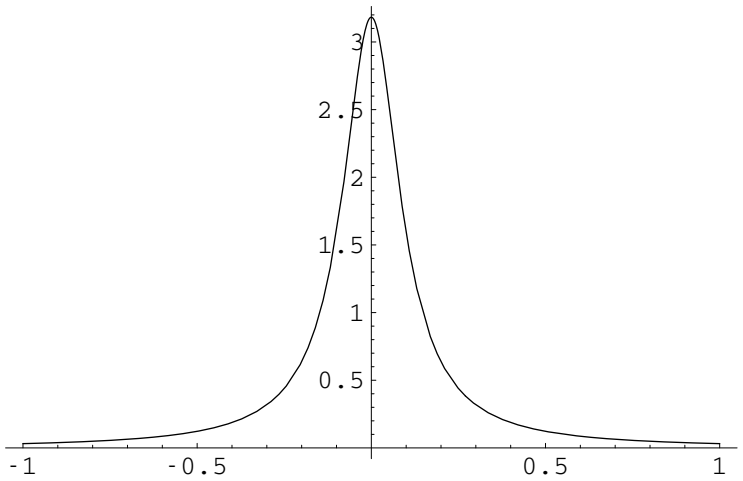
$$\delta_\epsilon[x\_] := \frac{\epsilon}{\pi}\frac{1}{x^2 + \epsilon^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon[x]\,dx$$

$$\text{If}\left[\text{Arg}[\epsilon^2] \neq \pi, \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2}}\,\epsilon, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon}{\pi(x^2 + \epsilon^2)}\,dx\right]$$

Mathematica läßt für ϵ auch komplexe Werte zu. Das Ergebnis bedeutet, daß das Integral gleich $\sqrt{\frac{1}{\epsilon^2}}\,\epsilon$ ist, wenn die komplexe Phase von ϵ nicht π ist. Andernfalls, wenn also ϵ eine negative reelle Zahl ist, kann das Integral nicht ausgewertet werden. Wenn wir uns auf positive reelle ϵ beschränken gilt demnach $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(x)\,dx = 1$. Für $x >> \epsilon$ geht δ_ϵ mit kleinen ϵ gegen 0. Nur in einer ϵ–Umgebung von 0 nimmt δ_ϵ große Werte an.

```
Plot[δϵ[x] /. ϵ -> 0.1, {x, -1, 1}]
```




```
- Graphics -
```

Wie schon in vorherigen Übungen, so setzt auch hier der Befehl `/.ϵ->0.1` in der Funktion δ_ϵ den Wert ϵ=`0.1` ein. Verändern sie ϵ, um zu sehen, wie für kleine ϵ eine Deltafunktion entsteht.

In[1]:=

$$\delta_\epsilon[x\_] := \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}}\, e^{-(x/\epsilon)^2}$$

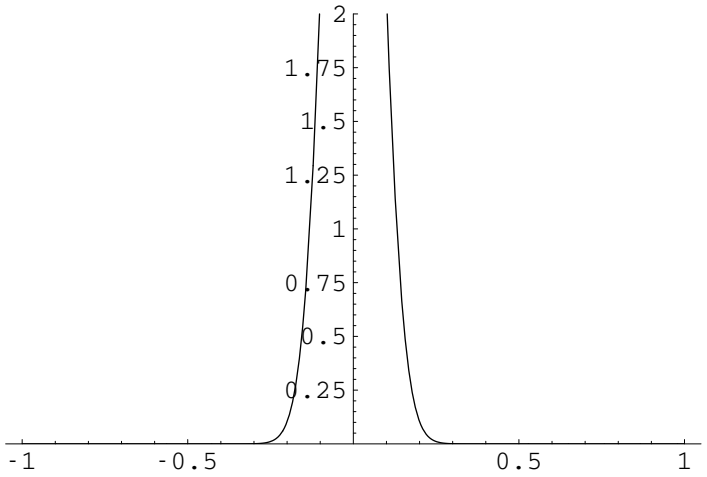
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon[x]\, dx$$

Out[2]= $\text{If}\left[\text{Re}[\epsilon^2] > 0,\ \frac{\sqrt{\epsilon^2}}{\epsilon},\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E^{-\frac{x^2}{\epsilon^2}}}{\sqrt{\pi}\ \epsilon}\, dx\right]$

Wenn wir uns auf positive reelle ϵ beschränken gilt demnach wieder $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(x)\, dx = 1$. Für $x >> \epsilon$ geht δ_ϵ mit kleinen ϵ gegen `0`. Nur in einer ϵ−Umgebung von `0` nimmt δ_ϵ große Werte an.

In[3]:=

```
Plot[δϵ[x] /. ϵ -> 0.1, {x, -1, 1}, PlotRange -> {0, 2}]
```



Out[3]= - Graphics -

Verändern sie ϵ, um zu sehen, wie für kleine ϵ eine Deltafunktion entsteht.

■ b)

Zeigen sie die folgenden Beziehungen, indem sie die Deltafunktion wie eine gewöhnliche Funktion behandeln:
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta'(x - x_0)\, dx = -f'(x_0)$,
$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax)\, dx = \frac{1}{|a|}$.

■ Lösung:

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta'(x - x_0)\, dx = \left[f(x)\, \delta(x - x_0) \right]_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\, \delta(x - x_0)\, dx = -f'(x_0)$,
$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax)\, dx = \frac{1}{|a|}$.

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax)\, dx = \frac{1}{a} \int_{-a\infty}^{a\infty} \delta(y)\, dy = \frac{1}{|a|} \int_{-|a|\infty}^{|a|\infty} \delta(y)\, dy = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)\, dy = \frac{1}{|a|}$.

Man sollte nicht vergessen, die verwendeten Variablen am Ende jeder Aufgabe zu initialisieren.

```
δϵ[a_] =.
```

■ 9. Hausübung , 17. 6. 97

■ Aufgabe 1)

Der Ablaufwirbel in einer Badewanne kann durch das Geschwindigkeitsfeld $\vec{w} = -\frac{a}{r^2}\, \hat{e}_r + \frac{b}{\varrho}\, (\hat{e}_\varphi - \hat{e}_\varrho)$ näherungsweise beschrieben werden. Was ist `div(w)`? Beschreiben sie $\vec{w}$ in Kugelkoordinaten. Benutzt man ϑ als Kurvenparameter, so lautet die Gleichung für die Stromlinien $\frac{d\vec{r}}{d\vartheta} \times \vec{w} = 0$. Überzeugen sie sich davon, daß sich die $\hat{e}_\vartheta$–Komponente dieser Gleichung aus der $\hat{e}_\vartheta$– und der $\hat{e}_\vartheta$–Komponente ergibt. Berechnen sie `r(ϑ)` und `φ(ϑ)`. Für die Parameter `a = b = 1` skizziere man `z(ϱ)` und `x(y)` für die Stromlinie mit der Anfangsbedingung `z = 1` für $\varrho \to \infty$ und φ `= 0` für ϱ `= z`.

■ Lösung:

Mit $\hat{e}_\varrho = \sin(\vartheta)\, \hat{e}_r + \cos(\vartheta)\, \hat{e}_\vartheta$ und $\varrho = r \sin(\vartheta)$ ergibt sich $\vec{w} = -\frac{a+b\,r}{r^2}\, \hat{e}_r - \frac{b \cos(\vartheta)}{r \sin(\vartheta)}\, \hat{e}_\vartheta + \frac{b}{r \sin(\vartheta)}\, \hat{e}_\varphi$. Der Nablaoperator in Kugelkoordinaten wurde bereits berechnet: $\vec{\nabla} = \hat{e}_r\, \partial_r + \frac{1}{r}\, \hat{e}_\vartheta\, \partial_\vartheta + \frac{1}{r \sin(\vartheta)}\, \hat{e}_\varphi\, \partial_\varphi$. Damit erhält man $\vec{\nabla} \cdot \vec{w} = \frac{2a+b\,r}{r^3} - \frac{a+b\,r}{r^3} + \frac{b \sin(\vartheta)^2 + b \cos(\vartheta)^2}{r^2 \sin(\vartheta)^2} - \frac{a+b\,r}{r^3} - \frac{b \cos(\vartheta)^2}{r^2 \sin(\vartheta)^2} = 0$. Dieses Ergebnis läßt sich auch mit *Mathematica* verifizieren

```
<< Calculus`VectorAnalysis`
SetCoordinates[Spherical[r, ϑ, φ]];
w = { -(a+b r)/r^2, -(b Cos[ϑ])/(r Sin[ϑ]), b/(r Sin[ϑ]) } // Flatten; Div[w]
```

```
0
```

Dabei wird die Funktion `Flatten` wieder nur dazu verwendet, den Vektor in die Darstellung zu bringen, die für `Div` gebraucht wird.

$\vec{r}(\vartheta)=r(\vartheta)\,\vec{e}_r(\vartheta,\varphi(\vartheta))$, $\frac{d\vec{r}(\vartheta)}{d\vartheta}=\vec{e}_r\,\partial_\vartheta\,r(\vartheta)+\vec{e}_\vartheta\,r(\vartheta)+\vec{e}_\varphi\,\sin(\vartheta)\,r(\vartheta)\,\partial_\vartheta\,\varphi(\vartheta)$ oder im Dreibein $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$, $\vec{e}_\varphi$ kann man das Kreuzprodukt $\frac{d\vec{r}}{d\vartheta}\times\vec{w}$ berechnen mit

```
nu = Cross[{{∂ϑ r[ϑ]}, {r[ϑ]}, {Sin[ϑ] r[ϑ] ∂ϑ φ[ϑ]}} // Flatten, w /. r -> r[ϑ]]
```

$$\left\{b\,\mathrm{Csc}[\vartheta]+b\,\mathrm{Cos}[\vartheta]\,\varphi'[\vartheta],\ -\frac{b\,\mathrm{Csc}[\vartheta]\,r'[\vartheta]}{r[\vartheta]}-b\,\mathrm{Sin}[\vartheta]\,\varphi'[\vartheta]-\frac{a\,\mathrm{Sin}[\vartheta]\,\varphi'[\vartheta]}{r[\vartheta]},\ b+\frac{a}{r[\vartheta]}-\frac{b\,\mathrm{Cot}[\vartheta]\,r'[\vartheta]}{r[\vartheta]}\right\}$$

Das Kreuzprodukt muß verschwinden, damit die Kurve $\vec{r}(\vartheta)$ immer parallel zu $\vec{w}$ ist. Die Forderung, daß die erste Komponente des Kreuzprodukts verschwindet ergibt $\varphi'[\vartheta]=-\csc(\vartheta)\sec(\vartheta)$, wobei der Cosecans die Funktion `1/sin(ϑ)` beschreibt und der Secans die Funktion `1/cos(ϑ)`. Setzt man dies in das Kreuzprodukt ein, so erhält man

```
nu /. φ'[ϑ] -> -Csc[ϑ] Sec[ϑ]
```

$$\left\{0,\ b\,\mathrm{Sec}[\vartheta]+\frac{a\,\mathrm{Sec}[\vartheta]}{r[\vartheta]}-\frac{b\,\mathrm{Csc}[\vartheta]\,r'[\vartheta]}{r[\vartheta]},\ b+\frac{a}{r[\vartheta]}-\frac{b\,\mathrm{Cot}[\vartheta]\,r'[\vartheta]}{r[\vartheta]}\right\}$$

Die $\vec{e}_\vartheta$−Komponente entsteht also aus der $\vec{e}_\varphi$−Komponente durch Multiplikation mit `sec(ϑ)`. Die Forderung, daß diese Komponenten verschwinden ergibt die Differentialgleichung $r'(\vartheta)=(r(\vartheta)+a/b)\tan(\vartheta)$. Diese Differentialgleichung kann integriert werden

$\int\frac{dr}{r+a/b}=\int\tan(\vartheta)\,d\vartheta$, $\ln(r+a/b)=-\ln(\cos(\vartheta))+\mathrm{const}$, $r(\vartheta)=\mathrm{const}\cdot\sec(\vartheta)-a/b$

Mit *Mathematica* kann man solch Differentialgleichungen mittels der Funktion `DSolve` lösen und erhält das selbe Ergebnis

```
DSolve[r'[ϑ] == (r[ϑ] + a/b) Tan[ϑ], r[ϑ], ϑ]
```

$$\left\{\left\{r[\vartheta]\to-\frac{a}{b}+C[1]\,\mathrm{Sec}[\vartheta]\right\}\right\}$$

Auch die Differentialgleichung für `r[ϑ]` kann man integrieren

$\varphi(\vartheta)=-\int\frac{d\vartheta}{\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)}=-\int\frac{d\vartheta}{\tan(\vartheta)\cos(\vartheta)^2}=-\int\frac{1}{\tan(\vartheta)}\frac{d\tan(\vartheta)}{d\vartheta}\,d\vartheta=-\ln(\tan(\vartheta))+\mathrm{const}$

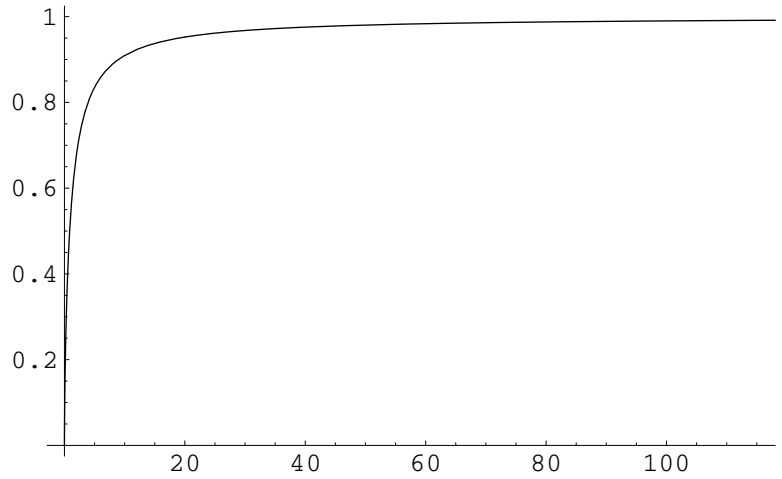
und erhält das gleiche Ergebnis wie die Funktion `DSolve`

```
DSolve[φ'[ϑ] == -Csc[ϑ] Sec[ϑ], φ[ϑ], ϑ]
```

```
{{φ[ϑ] → C[1] + Log[Cos[ϑ]] - Log[Sin[ϑ]]}}
```

Mit $\varrho=r\sin(\vartheta)=\mathrm{cons}\cdot\tan(\vartheta)-\frac{a}{b}\sin(\vartheta)$ und $z=r\cos(\vartheta)=\mathrm{cons}-\frac{a}{b}\cos(\vartheta)$ hat man eine Parameterdarstellung der Kurve `z(ϱ)`. Für die Randbedingung `z -> 1` für $\varrho\to\infty$ erhält man für die Integrationskonstante `cons = 1`. Für `a = b` gilt also

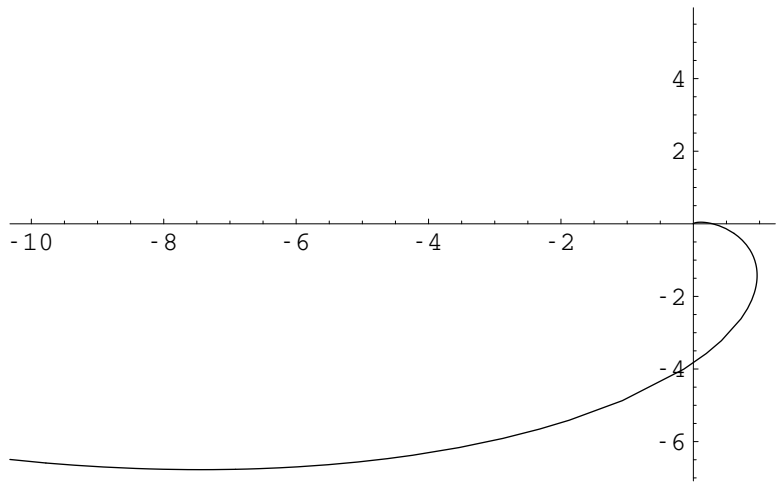
```
ϱ[ϑ_] := Tan[ϑ] - Sin[ϑ]; z[ϑ_] := 1 - Cos[ϑ];
  ParametricPlot[{ϱ[ϑ], z[ϑ]}, {ϑ, 0, π/2}]
```



- Graphics -

Bei $\varrho = z$ gilt $\tan(\vartheta)-\sin(\vartheta)=1-\cos(\vartheta)$. Dies läst sich umformen zu $\sin(\vartheta) = \cos(\vartheta)$ und damit $\vartheta = \pi / 4$.Damit ergibt sich die Integrationskonstante für φ aus $\varphi(\frac{\pi}{2}) = \text{cons} = 1$. Mit $x = r \sin(\vartheta) \cos(\varphi)$ und $y = r \sin(\vartheta) \sin(\varphi)$ erhält man dann

```
x[ϑ_] := (Tan[ϑ] - Sin[ϑ]) Cos[-Log[Tan[ϑ]]]
y[ϑ_] := (Tan[ϑ] - Sin[ϑ]) Sin[-Log[Tan[ϑ]]]
  ParametricPlot[{x[ϑ], y[ϑ]}, {ϑ, 0, π/2}]
```



- Graphics -

Verändern sie den Bereich von ϑ zum Beispiel zu {ϑ,0,0.1} um zu sehen, daß die Krümmung mehr und mehr zunimmt.

Man sollte nicht vergessen, die verwendeten Variablen am Ende jeder Aufgabe zu initialisieren.

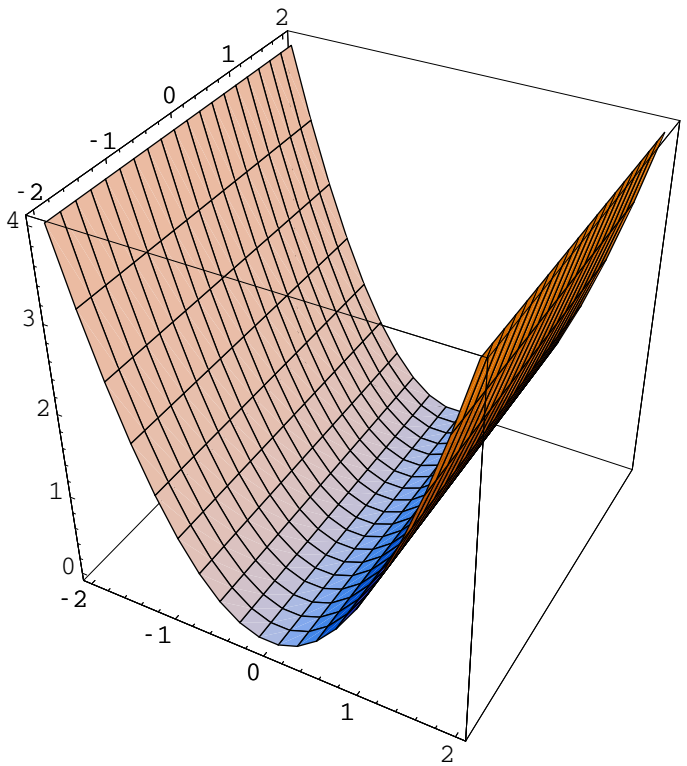
```
w⃗ =.; nu =.; ϱ[a_] =.; z[a_] =.; x[a_] =.; y[a_] =.
```

■ 9. Präsenzübung, 19/20. 6. 97

■ Aufgabe 1)

Gegeben sei eine in y–Richtung unendlich ausgedehnte Parabel $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 \end{pmatrix}$. Weiterhin sei das Vektorfeld $\vec{w}(x, y, z) = \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ gegeben. Geben sie das auf die Parabel projizierte Vektorfeld als Funktion von x und y an. Dies erhält man, indem man das Vektorfeld $\vec{w}$ für einem Punkt der Parabel auswertet und auf die Tangentialfläche projiziert. Dieses Vektorfeld erzeugt Feldlinien auf der Parabel. Geben sie die Feldlinie als Funktion von x an, die am Ursprung in die Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ verläuft.

```
ParametricPlot3D[{x, y, x^2}, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```



- Graphics3D -

■ Lösung:

Die Tangentialvektoren der Parabelfläche sind $\vec{t}_x = \frac{\partial}{\partial x}\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}$, $\vec{t}_y = \frac{\partial}{\partial y}\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Der Anteil des Vektorfeldes, der in der Tangentialebene liegt, ist

$$\vec{w}_t(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 \end{pmatrix} = \frac{(\vec{w}\cdot\vec{t}_x)\,\vec{t}_x}{\vec{t}_x^{\,2}} + \frac{(\vec{w}\cdot\vec{t}_y)\,\vec{t}_y}{\vec{t}_y^{\,2}} = \frac{x+2x^3}{1+4x^2}\,\vec{t}_x + y\,\vec{t}_y = \begin{pmatrix} x + 2x^3 \\ y(1 + 4x^2) \\ 2x^2 + 4x^4 \end{pmatrix} \frac{1}{1+4x^2}.$$

Projiziert man nun dieses Vektorfeld seinerseits auf die x,y–Ebene, so erhält man $\vec{w}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x+2x^3}{1+4x^2} \\ y \end{pmatrix}$. Die mit x parametrisierten Feldlinien dieses Vektorfeldes haben die Form $\begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix}$ und der Tangentialvektor hat daher die Form $\begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix}$ und muß parallel zu $\vec{w}(x, y)$ sein. Es ergibt sich also die Differentialgleichung

$$\frac{1}{y}\,dy = \frac{1+4x^2}{x+2x^3}\,dx = \left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{1+2x^2}\right) dx \;,$$

$$\ln(y) = \ln(x) + \frac{1}{2}\ln(1 + 2x^2) + \text{const}$$

$$y(x) = x\sqrt{1 + 2x^2}\cdot \text{const}$$

Wie schon in einer vorherigen Übung, so kann man auch hier mit der Funktion DSolve diese Lösung überprüfen

```
DSolve[y'[x] == y[x] (1 + 4 x^2)/(x + 2 x^3), y[x], x] // Simplify
```

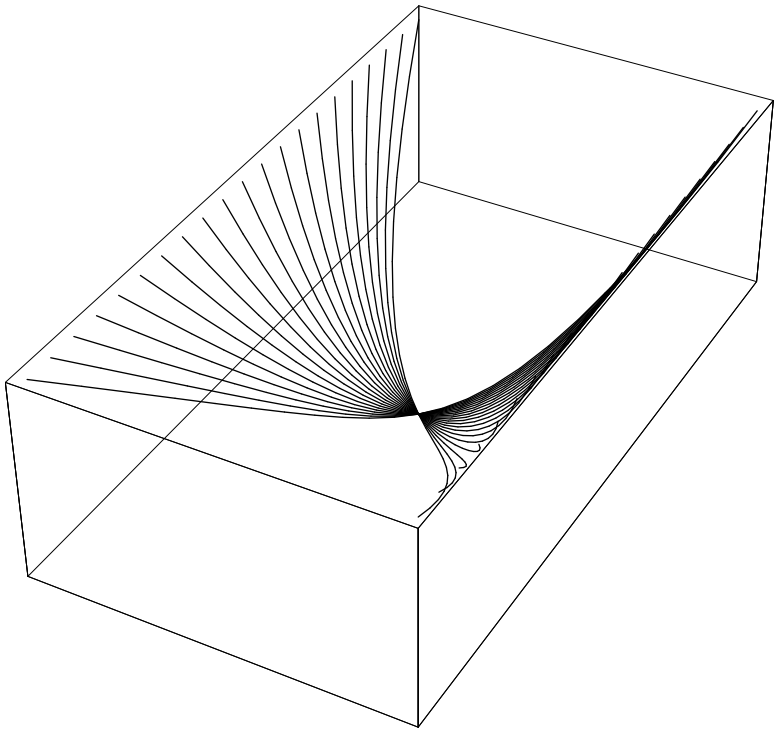
$$\{\{y[x] \to x\sqrt{1 + 2x^2}\ C[1]\}\}$$

Daraus folgt $y'(0) = \text{const}$. Da die Feldlinie gesucht ist, die am Ursprung den Tangentenvektor $\hat{e}_x + \hat{e}_y$ hat, folgt $\text{cons} = 1$.

Die Feldlinie des auf die Parabelfläche projizierte Vektorfelds hat daher die Form $\begin{pmatrix} x \\ x\sqrt{1 + 2x^2} \\ x^2 \end{pmatrix}$. Die folgende Abbildung soll dieses projizierte Vektorfeld verdeutlichen

```
f[x_] := {x, a x Sqrt[1 + 2 x^2], x^2} // Flatten

l = Table[Line[Table[f[x], {x, -1.1, 1.1, 0.1}]], {a, -1, 1, .1}];
Show[Graphics3D[l]]
```



- Graphics3D -

Man sollte nicht vergessen, die verwendeten Variablen am Ende jeder Aufgabe zu initialisieren.

```
f[a_] =.; l =.
```

■ 10. Hausübung, 24. 6. 97

■ Aufgabe 1)

Berechnen sie das Umlaufintegral $\oint \vec{w} \cdot d\vec{s}$ auf einem Kreis um den Ursprung mit Radius R, wenn $\vec{w}$ gegeben ist durch $\vec{w} = \frac{\vec{e}_z \times (\vec{e} - a\,\vec{e}_x)}{|\vec{e} - a\,\vec{e}_x|^2}$. Dabei läßt sich das Integral $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\alpha \cos(x)}\, dx$ bestimmen mittels

$$\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n$$

$$\frac{1}{1-\epsilon}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \frac{(2n)!}{n!^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-4\epsilon}}$$

■ Lösung:

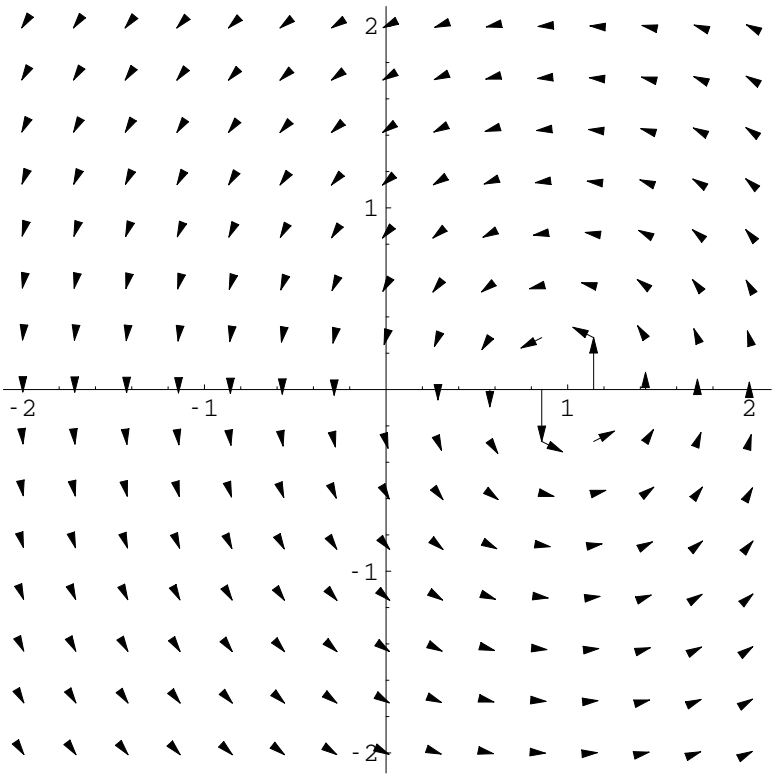
Mit Mathematica läßt sich die Lösung zwar einfach ausrechnen, aber damit sollte man sich nie zufrieden geben. Daher werden wir im Anschluß den Rechenweg aufzeigen.

```
w[ϱ_, φ_] := Cross[Flatten[{0, 0, 1}], Flatten[ϱ {Cos[φ], Sin[φ], 0} - {a, 0, 0}]] /
    Flatten[ϱ {Cos[φ], Sin[φ], 0} - {a, 0, 0}] . Flatten[ϱ {Cos[φ], Sin[φ], 0} - {a, 0, 0}]
∫_0^(2π) w[R, φ] . Flatten[{-Sin[φ], Cos[φ], 0}] R dφ // FullSimplify
```

$$\pi - \frac{\pi \sqrt{\frac{(a-R)^2}{(a+R)^2}}\ (a+R)}{a-R}$$

Zunächst ist es wieder sinnvoll, sich das Vektorfeld für `a=1` zu veranschaulichen.

```
<< Graphics`PlotField`
a = 1; Off[ArcTan::"indet"]
PlotVectorField[
Part[w[Sqrt[x^2 + y^2], ArcTan[x, y]], {1, 2}], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, Axes -> True]
On[ArcTan::"indet"]
```



- Graphics -

$$\int_0^{2\pi} \vec{w} \cdot \vec{e}_\varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_z \times (R\,\vec{e}_\varrho - a\,\vec{e}_x)}{|R\,\vec{e}_\varrho - a\,\vec{e}_x|^2} \cdot \vec{e}_\varphi \, R \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{R\,\vec{e}_\varphi - \vec{e}_y\, a}{(R\,\vec{e}_\varrho - a\,\vec{e}_x)^2} \cdot \vec{e}_\varphi \, R \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{R - a\cos(\varphi)}{R^2 + a^2 - 2\,R\,a\cos(\varphi)} \, R \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R^2 - a^2}{R^2 + a^2 - 2\,R\,a\cos(\varphi)}\right) d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R^2 - a^2}{R^2 + a^2} \, \frac{1}{1 - 2\,\alpha\cos(\varphi)}\right) d\varphi \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{R\,a}{R^2 + a^2}$$

$$= \pi + \frac{1}{2} \, \frac{R^2 - a^2}{R^2 + a^2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\,\alpha\cos(\varphi) + 2^2\,\alpha^2\cos(\varphi)^2 + \ldots)\, d\varphi$$

$$= \pi + \pi \, \frac{R^2 - a^2}{R^2 + a^2} \left(1 + \alpha^2 \, \frac{2!}{1!^2} + \alpha^4 \, \frac{4!}{2!^2} + \ldots\right)$$

$$= \pi + \pi \, \frac{R^2 - a^2}{R^2 + a^2} \, \frac{1}{\sqrt{1 - 4\,\alpha^2}} = \pi + \pi \, \frac{R^2 - a^2}{\sqrt{(R^2 + a^2)^2 - 4\,(R\,a)^2}}$$

$$= \pi + \pi \, \frac{R^2 - a^2}{|R^2 - a^2|} = \begin{cases} 2\pi & \text{if } R > |a| \\ 0 & \text{if } R < |a| \end{cases}$$

Das Umlaufintegral springt also im Punkt $a\,\vec{e}_x$ von 0 auf 2π. Es muß also in diesem Punkt eine Singularität der Rotation liegen. Nach einer Verschiebung des Ursprungs auf diesen Punkt erhält man $\vec{w} = \frac{\vec{e}_\varphi}{\varrho}$. Dies ist das bereits behandelte Vektorfeld der rotationsfreien Drehstömung.

Man sollte nicht vergessen, die verwendeten Variablen am Ende jeder Aufgabe zu initialisieren.

```
w[a_, b_] =.; a =.
```

■ 10. Präsenzübung, 26/27. 6. 97

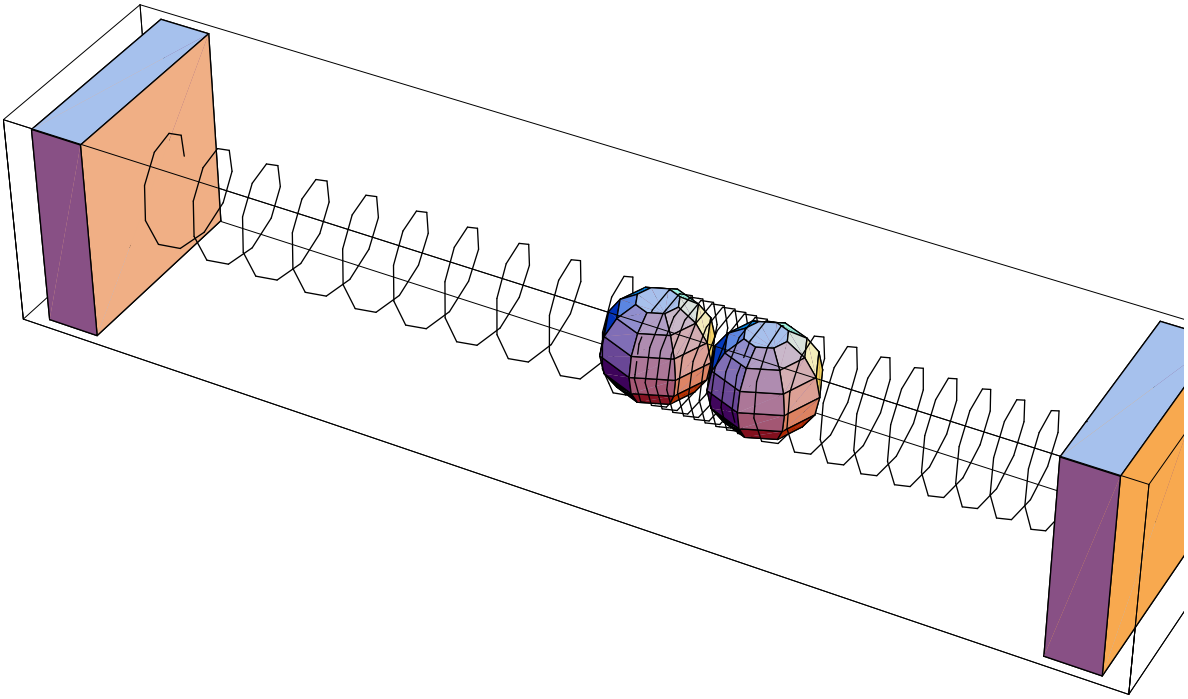
■ Aufgabe 1)

Zwei Massepunkte der Masse `m` sind mit einer Feder der Federkonstante c_2 miteinander verknüpft. Außerdem sind beide mit Federn der Federkonstante c_1 an zwei gegenüberliegenden Wänden verankert. Berechnen Sie die Potentielle Energie des Systems. Berechnen Sie die beiden Schwingungszustände, die harmonische Schwingungen durchführen, also nur gemäß der Cosinus– oder Sinusfunktion variieren. Durch welche Anfangszustände werden diese Schwingungen angeregt? Beschreiben sie die Bewegung, die durch die eingeleitet wird, wenn die eine Masse in ihrer Gleichgewichtslage ruht und die andere um die Länge x_0 ausgelenkt ist und sich zu Anfang dort in Ruhe befindet.

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Setzen sie hier verschiedene Anfangsbedingungen ein und stellen sie fest, ob die resultierende Bewegung ihren Erwartungen entspricht.

```
<< Graphics`Shapes`
pv[t_] := Evaluate[1/2 {{1, 1}, {1, -1}} . {{Cos[2 π/20 t], 0}, {0, Cos[4 π/20 t]}} . {{1, 1}, {1, -1}} . Flatten[r0]];
p1[t_] := pv[t][[1]]; p2[t_] := pv[t][[2]]
quad[vr_, x_, y_, z_] := TranslateShape[
  Graphics3D[{Polygon[{{0, 0, 0}, {0, 0, z}, {0, y, z}, {0, y, 0}, {0, 0, 0}}],
    Polygon[{{x, 0, 0}, {x, 0, z}, {x, y, z}, {x, y, 0}, {x, 0, 0}}],
    Polygon[{{0, 0, 0}, {x, 0, 0}, {x, 0, z}, {0, 0, z}, {0, 0, 0}}],
    Polygon[{{0, y, 0}, {x, y, 0}, {x, y, z}, {0, y, z}, {0, y, 0}}],
    Polygon[{{0, 0, 0}, {x, 0, 0}, {x, y, 0}, {0, y, 0}, {0, 0, 0}}],
    Polygon[{{0, 0, z}, {x, 0, z}, {x, y, z}, {0, y, z}, {0, 0, z}}]}], vr]
spiral[x_, l_] := TranslateShape[Graphics3D[
  Line[Table[{h, 0.5 Cos[20 π h/l], 0.5 Sin[20 π h/l]}, {h, 0, l, l/100}]]], {x, 0, 0}]
sph[x_] := TranslateShape[Graphics3D[Sphere[0.5, 8, 8]], {x, 0, 0}]
Do[Show[quad[{-0.5, -1, -1}, 0.5, 2, 2], spiral[0, 3 + p1[i]], sph[3 + p1[i]],
  spiral[3 + p1[i], 3 - p1[i] + p2[i]], sph[6 + p2[i]], spiral[6 + p2[i], 3 - p2[i]],
  quad[{9, -1, -1}, 0.5, 2, 2], PlotRange -> All], {i, 0, 19}]
Clear[pv, p1, p2, quad, spiral, sph]
```



Doppeltklicken sie auf dieses Bild, um die Bewegung der Massen nach obigen Anfangsbedingungen zu sehen.

■ Lösung:

Wir bezeichnen die Auslenkung der linken Masse aus der Ruhelage mit x, die Auslenkung der rechten mit y und betrachten die Kraftgleichung für den Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. $\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} -C_1\, x + C_2 (y - x) \\ -C_1\, y - C_2 (y - x) \end{pmatrix} = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} -(C_1 + C_2) & C_2 \\ C_2 & -(C_1 + C_2) \end{pmatrix} \vec{r} = M\, \vec{r}$ mit der 2×2 Matrix M. Diese Differentialgleichung ist nicht direkt lösbar, da x und y verknüpft werden. Wäre die Matrix M diagonal, so könnte eine Lösung für x und für y getrennt angegeben werden. Wir versuchen daher, zu einer ähnlichen Differentialgleichung mit diagonaler Matrix überzugehen. Nehmen wir an, daß die Matrix M zwei Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ hat, für die es also Eigenwerte λ_i gibt mit $M\, \vec{v}_i = \lambda_i\, \vec{v}_i$. Wir können dann diese Eigenvektoren als Basis benutzen, um die Bewegung zu beschreiben, $\vec{r} = w_1\, \vec{v}_1 + w_2\, \vec{v}_2$. Setzen wir dies in die Differentialgleichung ein, so erhalten wir $\ddot{\vec{r}} = \ddot{w_1}\, \vec{v}_1 + \ddot{w_2}\, \vec{v}_2 = M(w_1\, \vec{v}_1 + w_2\, \vec{v}_2) = w_1\, \lambda_1\, \vec{v}_1 + w_2\, \lambda_2\, \vec{v}_2$. Ein Vergleich der Koeffizienten führt nun mit $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ zu der gesuchten Differentialgleichung $\ddot{\vec{w}} = \begin{pmatrix} -\omega_1{}^2 & 0 \\ 0 & -\omega_2{}^2 \end{pmatrix} \vec{w}$, wobei $\lambda_i = -\omega_i{}^2$ gesetzt wurde. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung läst sich nun angeben,

$$\vec{w}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_1\, t) & 0 \\ 0 & \cos(\omega_2\, t) \end{pmatrix} \vec{w}(0) + \begin{pmatrix} \frac{\sin(\omega_1\, t)}{\omega_1} & 0 \\ 0 & \frac{\sin(\omega_2\, t)}{\omega_2} \end{pmatrix} \dot{\vec{w}}(0).$$

Die Komponenten von $\vec{r}$ und $\vec{w}$ sind durch eine Matrix verknüpft, die wegen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = w_1\, \vec{v}_1 + w_2\, \vec{v}_2 = T \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ als Spaltenvektoren die $\vec{v}_i$ einthält, $T = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Für die inverse Matrix gilt $T^{-1}\, \vec{r} = \vec{w}$. Wenn am Anfangszeitpunkt die Massen ruhen, $\dot{\vec{r}}(0) = 0$, dann ist die Lösung gebeben durch

$$\vec{r}(t) = T \begin{pmatrix} \cos(\omega_1\, t) & 0 \\ 0 & \cos(\omega_2\, t) \end{pmatrix} T^{-1}\, \vec{r}\,(0).$$

Rein harmonische Schwingungen erhält man also wenn $\vec{r}(0) = T \begin{pmatrix} w_1(0) \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\vec{r}(0) = T \begin{pmatrix} 0 \\ w_2(0) \end{pmatrix}$.

Wir müssen nun also lediglich die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix M finden. Die Gleichung $(M - \lambda_i)\, \vec{v}_i = 0$ kann nur dann nichttriviale Lösungen für $\vec{v}_i$ haben, wenn für die Determinante gilt $\det |\, M - \lambda_i\, | = 0$. Im gegebenen Fall lautet dieses charakteristische Polynom $\lambda^2 + 2\, \frac{C_1 + C_2}{m}\, \lambda_i\, \frac{+(C_1 + C_2)^2 - C_2{}^2}{m^2} = 0$ mit den Lösungen $\lambda_1 / \lambda_2 = -\frac{C_1}{m} / -\frac{C_1 + 2\, C_2}{m} = -\omega_1{}^2 / -\omega_2{}^2$. Der Eigenvektor $\vec{v}_i$ wird dann aus $(M - \lambda_i)\, \vec{v}_i = 0$ berechnet. Hier erhalten wir $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Man kann die Eigenwerte und Eigenvektoren auch mit Hilfe von *Mathematica* berechnen

```
Eigensystem[1/m {{-(c1 + c2), c2}, {c2, -(c1 + c2)}}] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{c_1}{m} & \frac{-c_1-2c_2}{m} \\ \{1, 1\} & \{-1, 1\} \end{pmatrix}$$

Wenn die beiden Massen anfangs bei $\vec{r}(0)$ ruhen, erhalten wir die Bewegung

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t) & 0 \\ 0 & \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\vec{r}(0)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) & \cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t) \\ \cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t) & \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix}\vec{r}(0)$$

Rein harmonische Schwingungen erhält man für die Anfangsauslenkungen $\vec{r}(0) = T\begin{pmatrix} w_1(0) \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{r}(0) = T\begin{pmatrix} 0 \\ w_2(0) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Geben sie diese Anfangsbedingungen in obige Rechnung ein und Doppeltklicken sie aufdie berechneten Bilder, um die rein harmonischen Lösungen zu sehen.

```
r0 = .
```

■ 11. Hausübung, 1. 7. 97

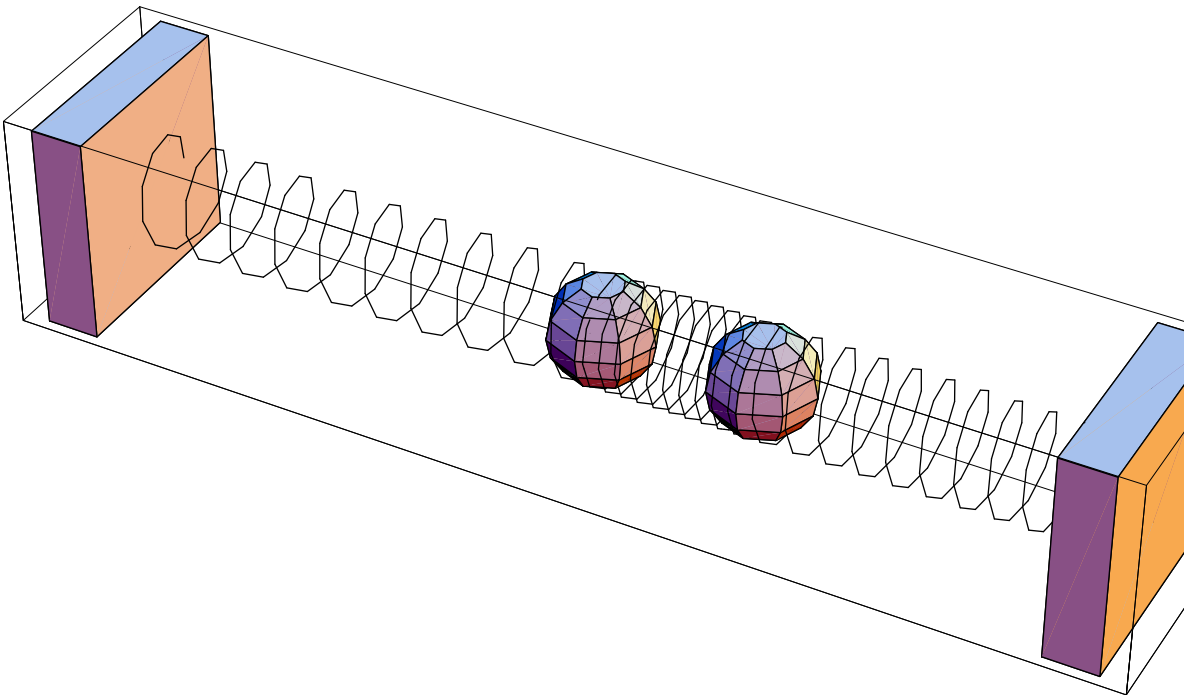
■ Aufgabe 1)

Zwei Massepunkte der Masse m sind mit einer Feder der Federkonstante c_2 miteinander verknüpft. Außerdem ist die eine Masse mit einer Feder der Federkonstante c_1 an einer Wänden verankert. Die andere Masse ist mit Federkonstante c_3 an einer gegenübergelegenen Wand verankert.

```
r0 = {{1.5}, {0}};
```

Setzen sie hier verschiedene Anfangsbedingungen ein und stellen sie fest, ob die resultierende Bewegung ihren Erwartungen entspricht.

```
<< Graphics`Shapes`
pv[t_] := Evaluate[1/5 {{2, 1}, {-1, 2}} . {{Cos[4 π/20 t], 0}, {0, Cos[2 π/20 t]}} . {{2, -1}, {1, 2}} . Flatten[r0]];
p1[t_] := pv[t][[1]]; p2[t_] := pv[t][[2]]
quad[vr_, x_, y_, z_] := TranslateShape[
  Graphics3D[{Polygon[{{0, 0, 0}, {0, 0, z}, {0, y, z}, {0, y, 0}, {0, 0, 0}}],
    Polygon[{{x, 0, 0}, {x, 0, z}, {x, y, z}, {x, y, 0}, {x, 0, 0}}],
    Polygon[{{0, 0, 0}, {x, 0, 0}, {x, 0, z}, {0, 0, z}, {0, 0, 0}}],
    Polygon[{{0, y, 0}, {x, y, 0}, {x, y, z}, {0, y, z}, {0, y, 0}}],
    Polygon[{{0, 0, 0}, {x, 0, 0}, {x, y, 0}, {0, y, 0}, {0, 0, 0}}],
    Polygon[{{0, 0, z}, {x, 0, z}, {x, y, z}, {0, y, z}, {0, 0, z}}]}], vr]
spiral[x_, l_] := TranslateShape[Graphics3D[
  Line[Table[{h, 0.5 Cos[20 π h/l], 0.5 Sin[20 π h/l]}, {h, 0, l, l/100}]]], {x, 0, 0}]
sph[x_] := TranslateShape[Graphics3D[Sphere[0.5, 8, 8]], {x, 0, 0}]
Do[Show[quad[{-0.5, -1, -1}, 0.5, 2, 2], spiral[0, 3 + p1[i]], sph[3 + p1[i]],
  spiral[3 + p1[i], 3 - p1[i] + p2[i]], sph[6 + p2[i]], spiral[6 + p2[i], 3 - p2[i]],
  quad[{9, -1, -1}, 0.5, 2, 2], PlotRange -> All], {i, 0, 19}]
Clear[pv, p1, p2, quad, spiral, sph]
```



Durch Doppeltklicken dieses Bildes wird die berechnete Bildersequenz animiert.

■ a)

Wie lautet die Bewegungsgleichung der beiden Massen in den Koordinaten `x` und `y`, die die Auslenkung der ersten und der zweiten Masse aus ihrer Ruhelage beschreiben.

■ Lösung:

Wir betrachten wie in der vorherigen Präsenzübung wieder die Kraftgleichung für den Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} -C_1\, x + C_2 (y - x) \\ -C_3\, y - C_2 (y - x) \end{pmatrix} = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} -(C_1 + C_2) & C_2 \\ C_2 & -(C_3 + C_2) \end{pmatrix} \vec{r} = M\, \vec{r}$.

■ b)

Bestimmen sie die Normalschwingungen des Systems für den Fall $C_2 = \frac{6}{11} C_1$, $C_3 = \frac{2}{11} C_1$. Bestimmen sie dann $\vec{r}(t)$ wenn $\dot{\vec{r}}(0) = 0$.

■ Lösung:

Aus der Bewegungsgleichung $\ddot{\vec{r}} = \frac{c_1}{m} \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -17 & 6 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} \vec{r} = M\, \vec{r}$ erhalten wir die Matrix M. Das Eigensystem ergibt sich mittels des Charakteristischen Polynoms zu

```
Eigensystem[c1/m 1/11 {{-17, 6}, {6, -8}}] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{20\, c_1}{11\, m} & -\frac{5\, c_1}{11\, m} \\ \{-2,\ 1\} & \{\frac{1}{2},\ 1\} \end{pmatrix}$$

Die Schwingungsfrequenzen ergeben sich demnach zu $\omega_1 = 2\sqrt{\frac{5}{11}\frac{C_1}{m}}$ und $\omega_2 = \sqrt{\frac{5}{11}\frac{c_1}{m}}$. Die Matrix T, deren Spaltenvektoren die Eigenvektoren sind ergibt sich zu $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Das Inverse einer 2×2 Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\frac{1}{a\,d-b\,c}$ und damit $T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{5}$. Für die Anfangsbedingung $\dot{\vec{r}}(0) = 0$ ergibt sich die Schwingung $\vec{r}(t) = T\begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t) & 0 \\ 0 & \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix} T^{-1}\,\vec{r}(0)$,

```
cmat = {{Cos[ω1 t], 0}, {0, Cos[ω2 t]}}; tm = {{2, 1}, {-1, 2}}; invtm = Inverse[tm];
trans = tm . cmat . invtm; MatrixForm[trans]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5}\text{Cos}[t\,\omega_1] + \frac{1}{5}\text{Cos}[t\,\omega_2] & -\frac{2}{5}\text{Cos}[t\,\omega_1] + \frac{2}{5}\text{Cos}[t\,\omega_2] \\ -\frac{2}{5}\text{Cos}[t\,\omega_1] + \frac{2}{5}\text{Cos}[t\,\omega_2] & \frac{1}{5}\text{Cos}[t\,\omega_1] + \frac{4}{5}\text{Cos}[t\,\omega_2] \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}\text{Cos}[t\,\omega_1] + \frac{1}{5}\text{Cos}[t\,\omega_2] & -\frac{2}{5}\text{Cos}[t\,\omega_1] + \frac{2}{5}\text{Cos}[t\,\omega_2] \\ -\frac{2}{5}\text{Cos}[t\,\omega_1] + \frac{2}{5}\text{Cos}[t\,\omega_2] & \frac{1}{5}\text{Cos}[t\,\omega_1] + \frac{4}{5}\text{Cos}[t\,\omega_2] \end{pmatrix}\vec{r}(0)\,.$$

■ **c)**

Skizzieren sie für beide Normalschwingungen jeweils den Verlauf von `x` und `y` während einer Periode für $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$.

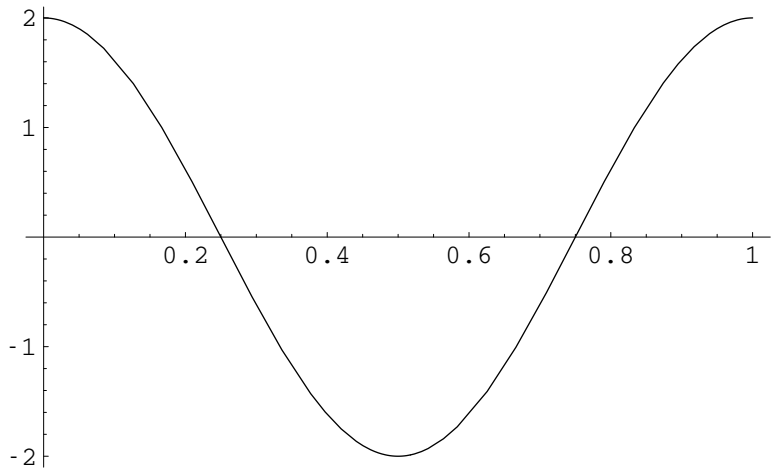
■ **Lösung:**

Die Normalschwingungen oder rein harmonischen Schwingungen ergeben sich für $\vec{r}(0) = T\begin{pmatrix} w_1(0) \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{r}(0) = T\begin{pmatrix} 0 \\ w_2(0) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Die erste Normalschwingung wird dann beschrieben durch

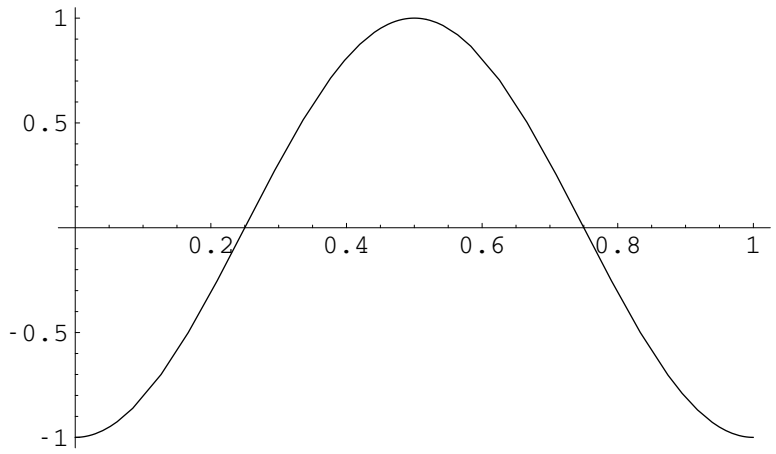
```
r = trans . Flatten[{{2}, {-1}}] // Simplify; r // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 2\,\text{Cos}[t\,\omega_1] \\ -\text{Cos}[t\,\omega_1] \end{pmatrix}$$

```
Plot[r⃗[[1]] /. ω1 -> 2 π, {t, 0, 1}]
Plot[r⃗[[2]] /. ω1 -> 2 π, {t, 0, 1}]
```



- Graphics -



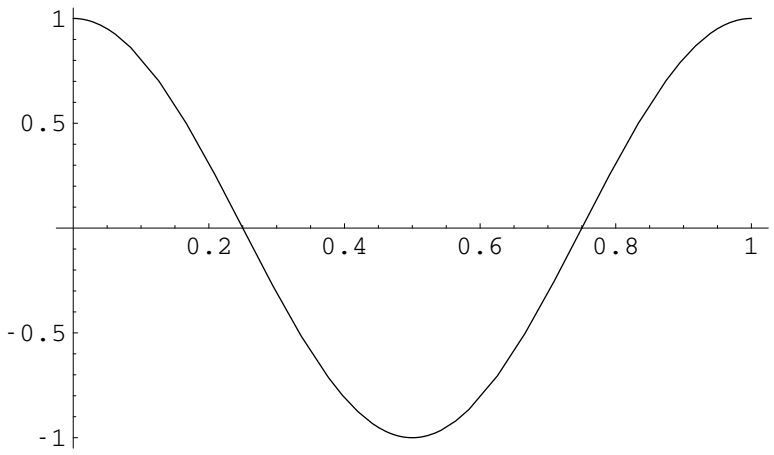
- Graphics -

Die zweite Normalschwingung wird beschrieben durch

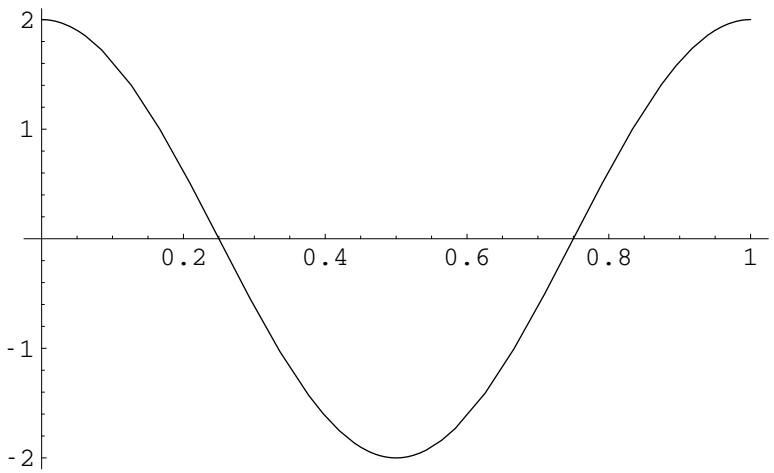
```
r⃗ = trans . Flatten[{1, 2}] // Simplify; r⃗ // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}[t\,\omega_2] \\ 2\,\text{Cos}[t\,\omega_2] \end{pmatrix}$$

```
Plot[r⃗[[1]] /. ω2 -> 2 π, {t, 0, 1}]
Plot[r⃗[[2]] /. ω2 -> 2 π, {t, 0, 1}]
```



- Graphics -



- Graphics -

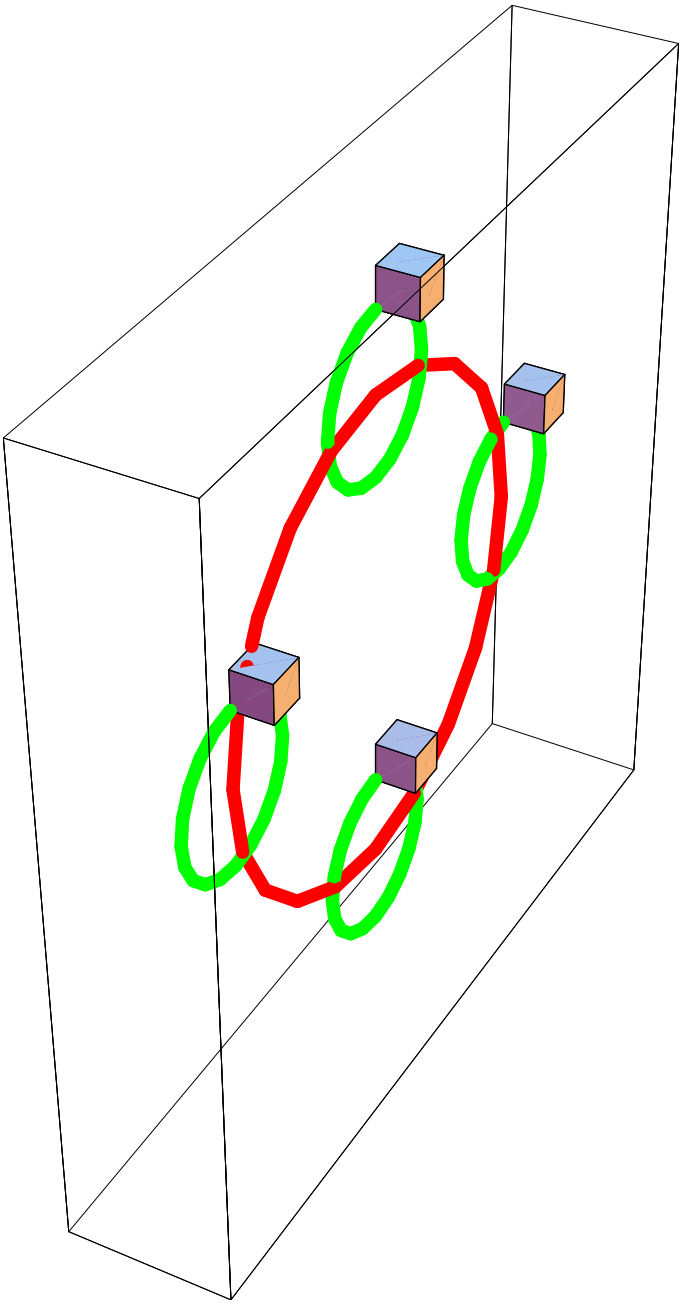
```
r⃗ =.; r⃗0 =.; cmat =.; tm =.; invtm =.; trans =.
```

■ 11. Präsenzübung, 3/4. 7. 97

■ Aufgabe 1)

Bei einem verallgemeinerten Riesenrad dreht sich ein Rad mit Radius `R` um eine horizontale Richtung mit der Winkelgeschwindigkeit Ω. An diesem Rad sind kleinere Räder mit einem Radius `r` angebracht, die sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die gleiche Richtung drehen. Auf diesem kleinen Rad ist eine Kabine angebracht. Berechnen Sie die Kraft, die auf den Fahrgast wirkt, sowohl in einem mit Ω rotierenden Bezugssystem wie auch in einem ruhenden Bezugssystem? Der Kraftvektor $\vec{F}(t)$ beschreibt eine geometrische Kurve; skizzieren sie diese Kurve in einem mit Ω rotierenden Bezugssystem und im ruhenden Bezugssystem.

```
rr = 6; r = 2; Ω = π/2; ω = 4 π/2; p[t_, n_] := {0, rr Sin[Ω t + n π/2], rr Cos[Ω t + n π/2]};
q[t_] := {0, r Sin[ω t], r Cos[ω t]};
circ[p_, r_] := Line[Table[p + {0, r Sin[ϑ], r Cos[ϑ]}, {ϑ, 0, 2 π, 2 π/20}]];
Do[Show[Graphics3D[
{RGBColor[1, 0, 0], Thickness[.02], circ[{0, 0, 0}, rr], RGBColor[0, 1, 0],
 Table[circ[p[t, n], r], {n, 4}], Table[Cuboid[p[t, n] + q[t]], {n, 4}]},
     PlotRange -> {{-2, 2}, {-10, 10}, {-10, 10}}]], {t, 0, .9, .1}]
Clear[rr, r, Ω, ω, p, q, circ]
```



Durch Doppeltklicken dieses Bildes wird die berechnete Bildersequenz animiert.

■ Lösung:

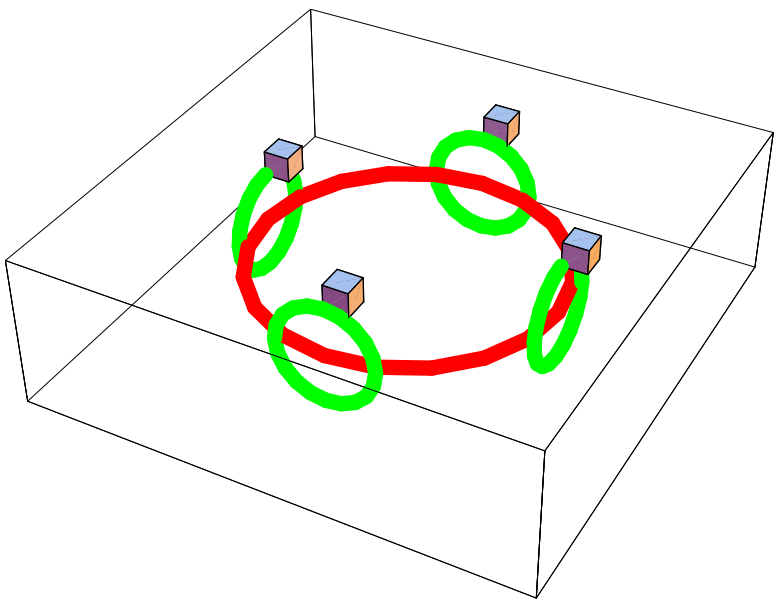
$\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) \\ \sin(\Omega t) \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$, $\vec{F}(t) = m \vec{r}''(t) = -\Omega^2 m R \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) \\ \sin(\Omega t) \end{pmatrix} - \omega^2 m r \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$. Die Kraft $\vec{F}(t)$ beschreibt also eine Kurve, die der Raumkurve der Gondel entspricht. Die Basisvektoren in einem mit Ω rotierenden Bezugssystem sind $\vec{e}_x' = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) \\ \sin(\Omega t) \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} -\sin(\Omega t) \\ \cos(\Omega t) \end{pmatrix}$. Die Kraft stellt sich dann dar als $\vec{F}(t) = (\vec{F} \cdot \vec{e}_x') \vec{e}_x' + (\vec{F} \cdot \vec{e}_y') \vec{e}_y' = -\Omega^2 m R \vec{e}_x' - \omega^2 m r (\vec{e}_x' \cos((\omega - \Omega) t) + \vec{e}_y' \sin((\omega - \Omega) t))$. Die Kraft verläuft im rotierenden Bezugssystem auf einem Kreis mit Radius $m \omega^2 r$ um den Punkt $(-m \Omega^2 R, 0)$.

■ 12. Hausübung, 8. 7. 97

■ Aufgabe 1)

Ein beliebtes Fahrgeschäft beim Heinerfest war einst das Mühlrad. Bei diesem Gerät rotiert eine Scheibe vom Radius R mit der konstanten Kreisfrequenz Ω um die z–Achse. Am Rande der Scheibe befinden sich senkrecht zur Scheibe Ausleger, an deren Ende die Fahrkabinen im Radius r angebracht sind. Die Ausleger rotieren mit der ebenfalls konstanten Kreisfrequenz ω.

```
rr = 6; r = 2; Ω = π/2; ω = -4 π/2; p[t_, n_] := {rr Cos[Ω t + n π/2], rr Sin[Ω t + n π/2], 0};
  q[t_, φ_] := {-r Sin[ω t] Sin[φ], r Sin[ω t] Cos[φ], r Cos[ω t]}; circ[p_, φ_] :=
 Line[Table[p + {-r Sin[ϑ] Sin[φ], r Sin[ϑ] Cos[φ], r Cos[ϑ]}, {ϑ, 0, 2 π, 2 π/20}]];
                Do[Show[Graphics3D[{RGBColor[1, 0, 0], Thickness[.02],
                Line[Table[{rr Cos[ϑ], rr Sin[ϑ], 0}, {ϑ, 0, 2 π, 2 π/20}]],
                RGBColor[0, 1, 0], Table[circ[p[t, n], Ω t + n π/2], {n, 4}],
                Table[Cuboid[p[t, n] + q[t, Ω t + n π/2]], {n, 4}]},
              PlotRange -> {{-10, 10}, {-10, 10}, {-3.1, 3.1}}]], {t, 0, .9, .1}]
                          Clear[rr, r, Ω, ω, p, q, circ]
```



■ a)

Berechnen Sie die Kraft $\vec{F}(t)$ auf den Fahrgast in der Kabine in dem mit der Scheibe mitrotierenden Bezugssystem S′, dessen x–Achse vom Mittelpunkt der Scheibe zum Drehpunkt eines Auslegers zeigt (Der Ausleger rotiert dann um die x–Achse).

■ Lösung:

Die Position der Gondel ist $\vec{r}(t) = R\,\vec{e}_{x'}(t) + r\left(\vec{e}_{y'}(t)\cos(\omega t) + \vec{e}_z \sin(\omega t)\right)$. Mit $\partial_t\,\vec{e}_{y'} = -\Omega\,\vec{e}_{x'}$ ergibt sich $\vec{r}'(t) = \Omega R\,\vec{e}_{y'}(t) + r\left(-\vec{e}_{x'}(t)\,\Omega\cos(\omega t) - \vec{e}_{y'}\,\omega\sin(\omega t) + \vec{e}_z\,\omega\cos(\omega t)\right)$ und mit $\partial_t\,\vec{e}_{x'} = \Omega\,\vec{e}_{y'}$ erhält man $\vec{r}''(t) = -\Omega^2 R\,\vec{e}_{x'}(t) - r\left(\vec{e}_{y'}(t)\,(\Omega^2+\omega^2)\cos(\omega t) - 2\,\vec{e}_{x'}\,\Omega\omega\sin(\omega t) + \vec{e}_z\,\omega^2\sin(\omega t)\right)$. Die Kraft $\vec{F}(t) = m\,\vec{r}''(t)$ entspricht damit er Formel $\vec{b} = \vec{b}_{S'} + 2\,\Omega\,\vec{e}_z \times \vec{v}_{S'}(t) + \Omega^2\,\vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times \vec{r}(t))$, denn

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{S'} &= r\,\omega\,(-\vec{e}_{y'}\sin(\omega t) + \vec{e}_z\cos(\omega t)) \\
\vec{b}_{S'} &= -r\omega^2\left(\vec{e}_{y'}\cos(\omega t) + \vec{e}_z\sin(\omega t)\right) \\
2\,\Omega\,\vec{e}_z \times \vec{v}_{S'}(t) &= 2\,\Omega\,r\omega\,\vec{e}_{x'}\sin(\omega t) \\
\Omega^2\,\vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times \vec{r}(t)) &= -\Omega^2 R\,\vec{e}_{x'} - \Omega^2 r\,\vec{e}_{y'}\cos(\omega t)
\end{aligned}$$

■ b)

Man berechne die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ eines Fahrgastes als Funktion der Zeit im Laborsystem. Kontrollieren Sie ihr Ergebnis aus Teilaufgabe a) durch Berechnung der Beschleunigung im Laborsystem.

■ Lösung:

Mit $\vec{e}_{x'} = \begin{pmatrix}\cos(\Omega t)\\ \sin(\Omega t)\\ 0\end{pmatrix}$ und $\vec{e}_{y'} = \begin{pmatrix}-\sin(\Omega t)\\ \cos(\Omega t)\\ 0\end{pmatrix}$ folgt

```
r⃗[t_] := rr (Cos[Ω t], Sin[Ω t], 0) + r ((-Sin[Ω t], Cos[Ω t], 0) Cos[ω t] + (0, 0, 1) Sin[ω t])
∂t,t r⃗[t] // TraditionalForm
```

$$\begin{pmatrix} r\cos(t\,\omega)\sin(t\,\Omega)\,\omega^2 + 2\,r\,\Omega\cos(t\,\Omega)\sin(t\,\omega)\,\omega - \mathrm{rr}\,\Omega^2\cos(t\,\Omega) + r\,\Omega^2\cos(t\,\omega)\sin(t\,\Omega) \\ -r\cos(t\,\omega)\cos(t\,\Omega)\,\omega^2 + 2\,r\,\Omega\sin(t\,\omega)\sin(t\,\Omega)\,\omega - r\,\Omega^2\cos(t\,\omega)\cos(t\,\Omega) - \mathrm{rr}\,\Omega^2\sin(t\,\Omega) \\ -r\,\omega^2\sin(t\,\omega) \end{pmatrix}$$

Dies stimmt mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe a) überein.

```
r⃗[a_] =.
```

■ 12. Präsenzübung, 10/11. 7. 97

■ Aufgabe 1)

Berechnen Sie $\mathrm{rot}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$, $\vec{\omega} = \mathrm{const}$ einmal direkt in kartesischen Koordinaten und einmal nach Umformen mit der BAC–CAB Formel.

■ Lösung:

$$\text{rot}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) = \vec{\nabla}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) = \begin{cases} \vec{\nabla}\times\begin{pmatrix}\omega_y\, z - \omega_z\, y\\ \omega_z\, x - \omega_x\, z\\ \omega_x\, y - \omega_y\, x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\,\omega_x\\ 2\,\omega_y\\ 2\,\omega_z\end{pmatrix} = 2\,\vec{\omega} \\ \vec{\omega}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}\right) - \left(\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{r} = 3\,\vec{\omega} - \vec{\omega} = 2\,\vec{\omega}\end{cases}$$

Dies läßt sich leicht überprüfen durch

```
<< Calculus`VectorAnalysis`
Curl[Cross[{ωx, ωy, ωz} // Flatten, {Xx, Yy, Zz} // Flatten]]
```

$$\{2\,\omega_x,\ 2\,\omega_y,\ 2\,\omega_z\}$$

■ Aufgabe 2)

Berechnen sie $\text{div}\left(\vec{r}\times\left(\vec{A}\times\vec{r}\right),\ \vec{A} = \text{const}\right)$.

■ Lösung:

$$\text{div}\left(\vec{r}\times\left(\vec{A}\times\vec{r}\right)\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{r}\times\left(\vec{A}\times\vec{r}\right)\right) = \left(\vec{\nabla}\times\vec{r}\right)\cdot\left(\vec{A}\times\vec{r}\right) - \vec{r}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\left(\vec{A}\times\vec{r}\right)\right) = -2\,\vec{r}\cdot\vec{A}.$$

Auch dies läßt sich überprüfen

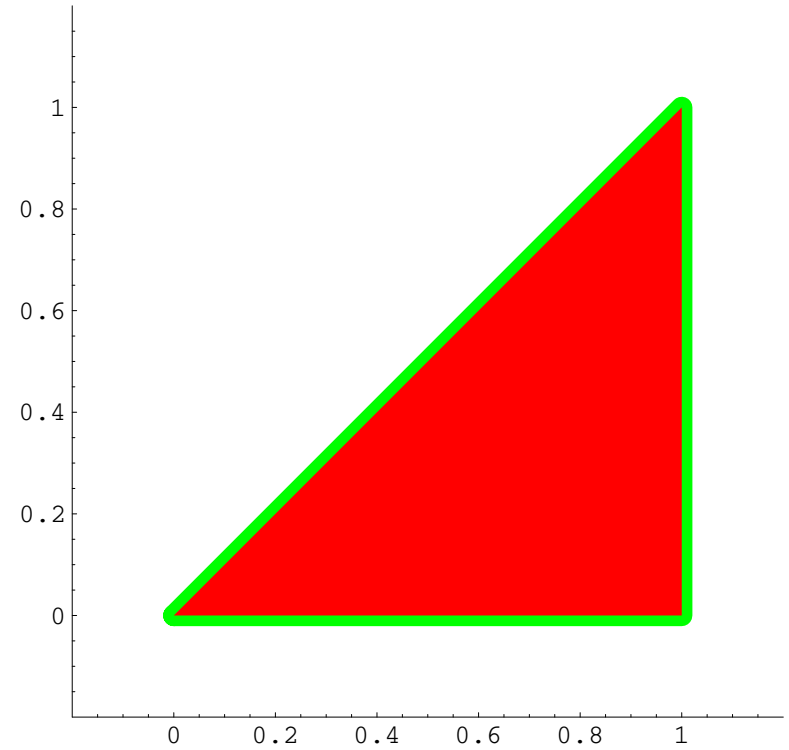
```
Div[Cross[{Xx, Yy, Zz} // Flatten, Cross[{Ax, Ay, Az} // Flatten, {Xx, Yy, Zz} // Flatten]]]
```

$$-2\,Xx\,A_x - 2\,Yy\,A_y - 2\,Zz\,A_z$$

■ Aufgabe 3)

Verifizieren sie den Stokes'schen Satz für die Funktion $\vec{w} = (y\,\vec{e}_x + x^2\,\vec{e}_y)$ für den Bereich $\{(x, y)\ |\ x, y \in [0, 1],\ y < x\}$.

```
l = {{0, 0}, {1, 0}, {1, 1}, {0, 0}};
Show[Graphics[{{RGBColor[0, 1, 0], Thickness[.03], Line[l]},
    {RGBColor[1, 0, 0], Polygon[l]}}, Axes -> True,
PlotRange -> {{-.2, 1.2}, {-.2, 1.2}}, AspectRatio -> 1, AxesOrigin -> {-.2, -.2}]]
Clear[l]
```



- Graphics -

■ Lösung:

$$\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x^2 \end{pmatrix};$$

$$\int_0^1 (w_x /. y \to 0)\, dx + \int_0^1 (w_y /. x \to 1)\, dy + \int_1^0 ((w_x + w_y) /. y \to x)\, dx$$

$$\frac{1}{6}$$

Die Rotation $\mathrm{rot}(\vec{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x-1 \end{pmatrix}$ zeigt in z−Richtung. Bei dem gewählten Umlauf im mathematisch positiven Sinn zeigt das Oberflächenelement in positive z−Rightung.

$$\int_0^1 \int_0^x (2x - 1)\, dy\, dx$$

$$\frac{1}{6}$$

Das Umlaufintegral und das Oberflächenintegral sind demnach in Übereinstimmung, wie der Stokes'sche Satz es verlangt.

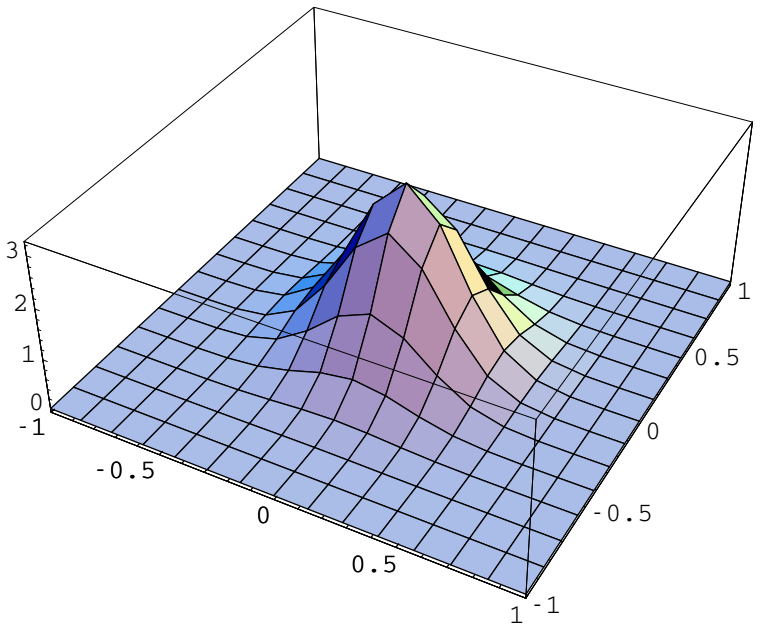
```
wx =.; wy =.
```

■ Aufgabe 4)

Zeigen Sie, daß $\delta(\vec{\varrho}) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi\epsilon} \exp\left(-\frac{\varrho^2}{\epsilon}\right)$, $\vec{\varrho} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y$, eine Darstellung der zweidimensionalen Deltafunktion ist.

■ Lösung:

```
δϵ[x_, y_] := 1/(π ϵ) Exp[-(x^2 + y^2)/ϵ]
Plot3D[δϵ[x, y] /. ϵ -> .1, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, PlotRange -> All]
```




```
- SurfaceGraphics -
```

Eine analytische Integration führt man am besten in Polarkoordinaten durch $\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \delta_\epsilon(\varrho)\,\varrho\,d\varphi\,d\varrho = 2\pi\int_0^{\infty} \frac{1}{\pi\epsilon}\exp\left(-\frac{\varrho^2}{\epsilon}\right)\varrho\,d\varrho = 1$ für $\epsilon > 0$. Mit *Mathematica* kann man auch in Kartesischen Koordinaten integrieren und erhält

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\epsilon[x, y]\,dx\right)dy$$

```
If[Re[ϵ] > 0 && Re[ϵ] > 0, 1, ∫_-∞^∞ (∫_-∞^∞ E^(-(x^2+y^2)/ϵ)/(π ϵ) dx) dy]
```

Immer, wenn der Realteil von ϵ größer als 0 ist, ist das Integral demnach 1, wie es für die Deltafunktion gefordert wird. Weiterhin konvergiert $\lim_{\epsilon\to 0}\delta_\epsilon(x, y)$ für $x^2 + y^2 \neq 0$ gegen 0. Daher stimmt $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\epsilon(x - x_0, y - y_0)\,f(x, y)\,dx\,dy$ für kleinere ϵ immer besser mit $f(x_0, y_0)$ überein.

```
δε[a_, b_] = .
```

■ Aufgabe 5)

Ein Oszillator, der resonant zu Schwingungen angeregt wird, folgt der Bewegungsgleichung $m\ddot{x} + C x = A \cos\left(t\sqrt{\frac{C}{m}}\right)$.

Berechnen Sie durch den Ansatz $x = B(t)\sin(\omega t)$, $\omega = \sqrt{\frac{C}{m}}$ den zeitlichen Verlauf `B(t)` für $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$.

■ Lösung:

`x(t) = B(t) sin(ω t)`, `ẋ(t) = Ḃ(t) sin(ω t) + ω B(t) cos(ω t)`,
`ẍ(t) = B̈(t) sin(ω t) + 2 ω Ḃ(t) cos(ω t) - ω² B(t) sin(ω t)`.
Durch Einsetzen in `m ẍ(t) + C x = A cos(ω t)` erhält man `B̈(t) sin(ω t) + 2 ω Ḃ(t) cos(ω t) = A/m cos(ω t)`
`B̈(t) = (A/m - 2 ω Ḃ(t)) cot(ω t)`
$\int \frac{\ddot{B}(t)}{A/m - 2\omega \dot{B}(t)}\,dt = \int \cot(\omega t)\,dt$
`-1/(2 ω) ln(A/m - 2 ω Ḃ(t)) = 1/ω ln(sin(ω t)) + const`
$\dot{B}(t) = \frac{A}{2\omega m} - \frac{const}{\sin(\omega t)^2}$
Aus den Anfangsbedingungen `x(0) = 0` und `ẋ(0) = 0` folgt `B(0) = 0` und `Ḃ(0) = A/(2 ω m)`, woraus die Integrationskonstante bestimmt wird zu `const=0`. Eine weitere Integration liefert `B(t) = A/(2 ω m) t` und `x(t) = A/(2 ω m) t sin(ω t)`.

Überprüfen kann man dieses Ergebnis mit

```
DSolve[{x''[t] + ω² x[t] == A/m Cos[ω t], x[0] == 0, x'[0] == 0}, x[t], t]
```

```
{{x[t] → A t Sin[t ω] / (2 m ω)}}
```

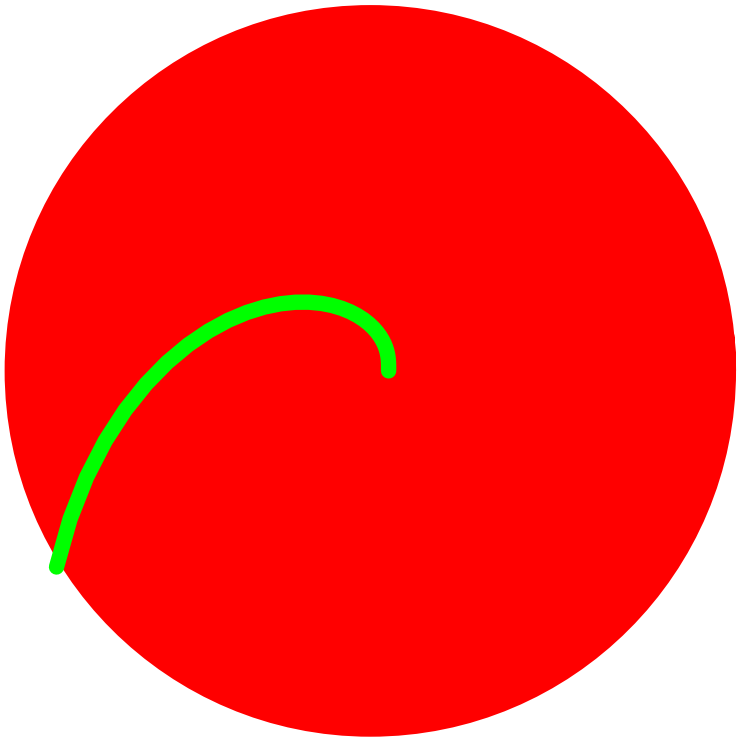
■ Aufgabe 6)

Auf einer mit der Kreisfrequenz $\omega = \text{const}$ rotierenden Scheibe rollt ein Waggon auf einer Schiene in radialer Richtung. Bestimmen Sie $r(t)$ für den Fall, daß der Waggon zum Zeitpunkt $t = 0$ bei r_0 ruht. Welche Kraft quer zu den Schienen wirkt auf den Waggon im Verlauf der Zeit?

■ Lösung:

`φ'(t) = ω`, `r⃗(t) = r(t) e⃗r`, `r⃗'(t) = r'(t) e⃗r + r(t) ω e⃗φ(t)`, `r⃗''(t) = (r''(t) - r(t) ω²) e⃗r(t) + 2 r'(t) ω e⃗φ(t)`. Da in $\vec{e}_r$–Richtung keine Kraft wirkt, folgt `r''(t) - r(t) ω² = 0` mit der allgemeinen Lösung `r(t) = C1 · cosh(ω t) + C2 · sinh(ω t)`. Wegen `r'(0) = 0`, `r(0) = r0` gilt, daß `C1 = r0`, `C2 = 0` und `r(t) = r0 cosh(ω t)`. Die von der Schiene ausgeübte Kraft ist `2 r'(t) ω e⃗φ(t) = 2 r0 ω² sinh(ω t) e⃗φ`. Die entstehende Raumkurve läßt sich darstellen durch

```
r[t_] := r0 Cosh[ω t]; r0 = 1; ω = 1; Show[Graphics[
{{RGBColor[1, 0, 0], Disk[{0, 0}, 20]}, {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[.02],
Line[Table[{r[t] Cos[ω t], r[t] Sin[ω t]}, {t, 0, 3.7, .1}]]}}],
AspectRatio -> 1, PlotRange -> All]
Clear[r, ω]
```



- Graphics -

■ Abschlußprüfung, 15. 7. 97

■ Aufgabe 1)

Formen sie $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})$ um, so daß kein Kreuzprodukt mehr auftritt. Formen sie $(\vec{A}(\vec{r})\times\vec{\nabla})\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{D}(\vec{r}))$ so um, daß kein Kreuzprodukt mehr auftritt und berücksichtigen sie dabei, daß der Nablaoperator auf alle Terme wirke, die in einem Produkt rechts von ihm stehen.

■ Lösung:

$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})=((\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C})\cdot\vec{D}=(\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C}))\cdot\vec{D}=(\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D})-(\vec{B}\cdot\vec{C})(\vec{A}\cdot\vec{D})$

$(\vec{A}(\vec{r})\times\vec{\nabla})\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{D}(\vec{r}))=(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}(\vec{r}))-(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})(\vec{A}\cdot\vec{D}(\vec{r}))$, wobei der Nablaoperator nur auf $\vec{D}(\vec{r})$ wirkt, nicht aber auf $\vec{A}$. $(\vec{A}(\vec{r})\times\vec{\nabla})\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{D}(\vec{r}))=(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}(\vec{r}))-\vec{A}\cdot[(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{D}(\vec{r})]$.

■ Aufgabe 2)

Verifizieren sie den Gaußschen Satz für das Vektorfeld $\vec{v}(x, y, z) = a\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} zx \\ zy \\ -x^2 - y^2 \end{pmatrix}$, wobei `a`, `b` und `c` Konstanten sind, indem sie das Volumenintegral der Divergenz über eine Kugel mit dem Oberflächenintegral des Vektorfeldes vergleichen.

■ Lösung:

$$\vec{v}(x, y, z) = a\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} zx \\ zy \\ -x^2 - y^2 \end{pmatrix} = a\, r\, \vec{e}_r + b\sqrt{x^2 + y^2}\ \vec{e}_\varphi + c\, r\sqrt{x^2 + y^2}\ \vec{e}_\vartheta\,, \quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \vec{v}\cdot\vec{e}_r\, R^2 \sin(\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi = 4\pi R^3 a$$

`div(`$\vec{v}$`)=3a+2c z`, $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \mathrm{div}(\vec{v})\, r^2 \sin(\vartheta)\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = 12\pi a \int_0^{R} r^2\, dr = 4\pi a R^3$

■ Aufgabe 3)

Berechnen sie das begleitende Dreibein und die Krümmung der Kurve $\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$. Es ist günstig, zunächst die Kurve mit der Bogenlänge `s` zu parametrisieren und $\vec{e}_b = \vec{e}_t \times \vec{e}_n$ zu verwenden.

■ Lösung:

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{\vec{r}}{dt}\right| = \frac{1}{2}, \quad t = 2s, \quad \vec{r}(s) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2s) \\ 1 - \cos(2s) \end{pmatrix},$$

$$\vec{e}_t = \frac{\partial_s \vec{r}}{|\partial_s \vec{r}|} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2s) \\ \sin(2s) \end{pmatrix}, \quad \kappa = |\partial_s \vec{e}_s| = 2, \quad \vec{e}_n = \frac{1}{\kappa}\partial_s \vec{e}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(2s) \\ \cos(2s) \end{pmatrix}, \vec{e}_b = \vec{e}_t \times \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

■ Aufgabe 4)

Das Feld zweier entgegengesetzt geladener Drähte hat die Form $\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y - a \end{pmatrix}\frac{1}{x^2 + (y-a)^2} - \begin{pmatrix} x \\ y + a \end{pmatrix}\frac{1}{x^2 + (y+a)^2}$. Berechnen sie die Taylorreihe um den Ursprung bis zur ersten Ordnung in `x` und `y`.

■ Lösung:

Wenn man alle Terme vernachlässigt, die zweiter oder höherer Ordnung in `x` und `y` sind, so gilt

$\vec{F}$ = `(x/(y-a)) 1/(x^2+(y-a)^2) - (x/(y+a)) 1/(x^2+(y+a)^2) ≈ (x/(y-a)) 1/a^2 1/(1-2 y/a) - (x/(y+a)) 1/a^2 1/(1+2 y/a)`

`≈ (x/(y-a)) 1/a^2 (1+2 y/a) - (x/(y+a)) 1/a^2 (1-2 y/a) ≈ -(0, 2/a)`

■ Aufgabe 5)

Wenn die x− und die y−Achse gleichmäßig mit Ladung belegt ist, so hat das Potential in der z−Ebene die Form $\Phi(x, y) = -\frac{1}{2}[\ln(x^2) + \ln(y^2)]$. Berechnen sie die Feldlinie und die Potentiallinie, die durch den Punkt (y_0, x_0) läuft, in der Form $y(x)$. Es sei $x_0 > 0$, $y_0 > 0$.

■ Lösung:

$\vec{F} = -\vec{\nabla}\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \end{pmatrix}$. Der Tangentenvektor der Feldlinie in der Parameterdarstellung $\begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix}$ ist parallel zu $\begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix}$. Daher gilt $y'(x)\,\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ und somit $\int y\,dy = \int x\,dx$, $y^2 = x^2 + \text{const}$. Mit den Anfangsbedingungen folgt $y(x) = \sqrt{x^2 - x_0^2 + y_0^2}$. Für die Potentiallinie gilt $\Phi(x, y) = -\frac{1}{2}[\ln(x^2) + \ln(y^2)] = \Phi(x_0, y_0) = \ln(x_0\, y_0)$ und daher $y(x) = \frac{x_0\, y_0}{x}$.

■ Aufgabe 6)

Eine Scheibe rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um ihre Symmetrieachse. Auf dieser Scheibe verläuft eine Schiene vom Mittelpunkt in radialer Richtung. Entlang dieser Schiene kann sich eine Masse reibungsfrei bewegen, die durch einen Faden mit dem Scheibenmittelpunkt verbunden ist. Bei konstanter Fadenlänge $\varrho(t) = \varrho_0$ stimmt die Spannkraft des Fadens mit der Zentripetalkraft überein. Wenn die Fadenlänge ϱ(t) sich mit der Zeit verändert, dann wirkt eine Kraft in azimuthaler Richtung auf die Schiene. Welcher Differentialgleichung muß $\varrho(t)$ genügen, damit der Betrag der Kraft, die auf die Schiene wirkt, mit dem Betrag der Spannkraft des Fadens übereinstimmt?

■ Lösung:

Die Koordinate der Masse ist $\vec{r} = \varrho\,\vec{e}_\varrho$. Die Beschleunigung dieses Punktes ist $\ddot{\vec{r}} = \left(\ddot{\varrho} - \varrho\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\varrho + (2\,\dot{\varrho}\,\dot{\varphi} + \varrho\,\ddot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi$ und ist proportional zur Kraft, die auf die Masse wirkt. Bei einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω erhält man $\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\varrho} - \varrho\omega^2)\,\vec{e}_\varrho + 2\,\dot{\varrho}\,\omega\,\vec{e}_\varphi$. Die Kraft in radialer Richtung, die den Faden spannt, ist daher Masse mal $\varrho\omega^2 - \ddot{\varrho}$. Diese Spannkraft soll gleich groß sein wie der Betrag der Kraft in azimuthale Richtung, die auf die Schiene wirkt: $\varrho\,\omega^2 - \ddot{\varrho} = |\,2\,\dot{\varrho}\,\omega\,|$.

■ Aufgabe 7)

Schreiben sie die relativistische Bewegungsgleichung $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\left(\dot{\vec{r}}, \vec{r}, t\right)$ für ein Teilchen mit Ruhemasse m um in die Form $\ddot{\vec{r}} = \vec{G}\left(\dot{\vec{r}}, \vec{r}, t\right)$. Es ist hilfreich die Kraft $\vec{F}$ und die Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}$ in ihre Komponenten $\vec{F}_p$ und $\ddot{\vec{r}}_p$ parallel zur Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$ und ihre Komponenten $\vec{F}_t$ und $\ddot{\vec{r}}_t$ senkrecht zur Geschwindigkeit zu zerlegen. Die Gesamtbeschleunigung ergibt sich dann aus der Summe dieser beiden Anteile.

■ **Lösung:**

$\vec{p} = m\,\gamma\,\dot{\vec{r}}$, $\gamma = \left[1 - \left(\frac{\dot{\vec{r}}}{c}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{d\,\vec{p}}{d\,t} = m\,\gamma\,\ddot{\vec{r}} + m\,\dot{\gamma}\,\dot{\vec{r}} = m\,\gamma^3\left[\ddot{\vec{r}}\left(1 - \left(\frac{\dot{\vec{r}}}{c}\right)^2\right) + \frac{1}{c^2}\,\dot{\vec{r}}\left(\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}\right)\right] = \vec{F}$.

Nun betrachtet man die Komponente dieser Gleuchung, die parallel zur Geschwindigkeit ist. Dazu Beschreiben wir die Parallelkomponente der Beschleunigung als $\ddot{\vec{r}}_p$ und die Transversalkomponente als $\ddot{\vec{r}}_t$. Die entspechenden Komponenten der Kraft werden mit $\vec{F}_p$ und $\vec{F}_t$ bezeichnet.

$m\,\gamma^3\,\ddot{\vec{r}}_p = \vec{F}_p$, $m\,\gamma^3\left[\ddot{\vec{r}}_t\left(1 - \left(\frac{\dot{\vec{r}}}{c}\right)^2\right)\right] = m\,\gamma\,\ddot{\vec{r}}_t = \vec{F}_t$, $\ddot{\vec{r}} = \left(\vec{F}_t + \frac{1}{\gamma^2}\,\vec{F}_p\right)\frac{1}{\gamma\,m}$.