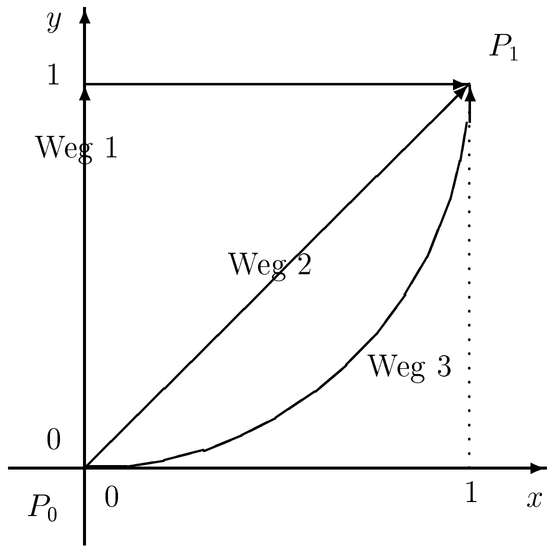
Übungen zur Einführung in die Theoretische Physik (Rose/Hoffsätter)

22/25.4.1997, Präsenzübung Nr. 1

Aufgabe 1) Für die folgenden Vektorfunktionen vergleiche man die Wegintegrale $\int_{p_0}^{p_1} \vec{v} \cdot \vec{ds}$ entlang den Wegen 1, 2 und 3, welche der Funktionen läßt sich als Gradient einer skalaren Funktion schreiben. Wie lautet diese skalare Funktion? Der Weg 3 verläuft entlang eines Kreisbogens.

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= x\vec{e}_x \\ \vec{v}_2 &= y\vec{e}_x \\ \vec{v}_3 &= 2xy\vec{e}_x + (x^2+y^2)\vec{e}_y \end{aligned}$$



Lösung:

Weg 1: Erstes Stück $\vec{s}_a(y) = y\vec{e}_y$, zweites Stück $\vec{s}_b = x\vec{e}_x + \vec{e}_y$.

$$\begin{aligned} \int_{P_0}^{P_1} \vec{v}(x,y) \cdot \vec{ds} &= \int_0^1 \vec{v}(0,y) \cdot \frac{d\vec{s}_a}{dy} dy + \int_0^1 \vec{v}(x,1) \cdot \frac{d\vec{s}_b}{dx} dx \\ &= \int_0^1 \vec{v}_y(0,y) dy + \int_0^1 \vec{v}_x(1,x) dx = \int_0^1 [\vec{v}_y(0,x) + \vec{v}_x(1,x)] dx \\ \int_{P_0}^{P_1} \vec{v}_1 \cdot \vec{ds} &= \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \\ \int_{P_0}^{P_1} \vec{v}_2 \cdot \vec{ds} &= \int_0^1 1 dx = 1 \\ \int_{P_0}^{P_1} \vec{v}_3 \cdot \vec{ds} &= \int_0^1 [x^2 + 2x] dx = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Weg 2: $\vec{s} = x\vec{e}_x + x\vec{e}_y$.

$$\begin{aligned}
\int_{P_0}^{P_1} \vec{v}(x,y)\cdot\vec{ds} &= \int_0^1 \vec{v}(x,x)\cdot\frac{d\vec{s}}{dx}dx = \int_0^1 [\vec{v}_x(x,x)+\vec{v}_y(x,x)]dx \\
\int_{P_0}^{P_1} \vec{v}_1\cdot\vec{ds} &= \int_0^1 xdx = \frac{1}{2} \\
\int_{P_0}^{P_1} \vec{v}_2\cdot\vec{ds} &= \int_0^1 xdx = \frac{1}{2} \\
\int_{P_0}^{P_1} \vec{v}_3\cdot\vec{ds} &= \int_0^1 4x^2dx = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Weg 3: $\vec{s} = \sin(\phi)\vec{e}_x + [1-\cos(\phi)]\vec{e}_y$.

$$\begin{aligned}
\int_{P_0}^{P_1} \vec{v}(x,y)\cdot\vec{ds} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{v}(x(\phi),y(\phi))\cdot\frac{d\vec{s}}{d\phi}d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(\phi)\vec{v}_x(\sin(\phi),1-\cos(\phi))+\sin(\phi)\vec{v}_y(\sin(\phi),1-\cos(\phi))]d\phi \\
\int_{P_0}^{P_1} \vec{v}_1\cdot\vec{ds} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\phi)\sin(\phi)d\phi = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2} \\
\int_{P_0}^{P_1} \vec{v}_2\cdot\vec{ds} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\phi)[1-\cos(\phi)]d\phi = 1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}[\cos(\phi)^2+\sin(\phi)^2d]\phi = 1-\frac{\pi}{4} \\
\int_{P_0}^{P_1} \vec{v}_3\cdot\vec{ds} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\phi)2\sin(\phi)[1-\cos(\phi)]+\sin(\phi)\{\sin(\phi)^2+[1-\cos(\phi)]^2\})d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(\phi)[1-\cos(\phi)^2]d\phi = \int_0^1 2(1-\xi^2)d\xi = \frac{4}{3} \quad \text{mit} \quad \xi = \cos(\phi)
\end{aligned}$$

Nur für $\vec{v}_3(\vec{r})$ kommt eine Wegunabhänigkeit des Integrals in Frage, und in der Tat: $\vec{\nabla}\times\vec{v}_3 = \partial_x v_{3y} - \partial_y v_{3x} = 0$. Wenn für einen zweidimensionalen Vector $\vec{v}(x,y)$ die Rotation verschwindet, $\vec{\nabla}\times\vec{v} = \partial_x v_y - \partial_y v_x = 0$, dann existiert eine Funktion $V(x,y)$ mit $\vec{v}(x,y) = \vec{\nabla}V(x,y)$.

$$\begin{aligned}
V(x,y) &= \int_0^x v_x(\tilde{x},0)d\tilde{x} + \int_0^y v_y(x,\tilde{y})d\tilde{y} + C, \text{ denn} \\
\vec{\nabla}V(\vec{r}) &= [v_x(x,0) + \int_0^y \partial_x v_y(x,\tilde{y})d\tilde{y}]\vec{e}_x + v_y(x,y)\vec{e}_y \\
&= [v_x(x,0) + \int_0^y \partial_y v_x(x,\tilde{y})d\tilde{y}]\vec{e}_x + v_y(x,y)\vec{e}_y \\
&= \{v_x(x,0) + [v_x(x,\tilde{y})]_0^y\}\vec{e}_x + v_y(x,y)\vec{e}_y \\
&= v_x(x,y)\vec{e}_x + v_y(x,y)\vec{e}_y = \vec{v}(x,y) \\
V_3(x,y) &= \int_0^y (x^2+\tilde{y}^2)d\tilde{y} + C = x^2y + \frac{y^3}{3} + C
\end{aligned}$$