Übungen zur Einführung in die Theoretische Physik (Rose/Hoffstätter)

28.4/2.5.1997, Präsenzübung Nr. 2

Aufgabe 1) Formen Sie die folgenden Ausdrücke um, so daß $\vec{\nabla}$ nicht auf Produkte zwischen $\vec{A}$, $\vec{B}$, oder U wirkt.

1. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$
2. $\vec{\nabla} \cdot (U\vec{A})$
3. $\vec{\nabla} \times (U\vec{A})$
4. $\vec{\nabla}|\vec{A}|^2$

Überprüfen sie den letzten Fall anhand von $\vec{A} = 2xy\vec{e}_x + x^2\vec{e}_y$.

Aufgabe 2) Gegeben sei eine Raumkurve $\vec{r}(t)$, die mit der Zeit parametrisiert ist. Für die Weglänge s entlang der Kurve gilt

$$\frac{ds}{dt} = v = |\frac{d\vec{r}}{dt}| \ ,$$

wobei v die Geschwindigkeit entlang der Raumkurve bezeichnet. Der Tangentenvektor $\vec{e}_t(t)$ ist der Einheitsvektor in Richtung der Geschwindigkeit,

$$\vec{e}_t(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}/|\frac{d\vec{r}}{dt}| = \frac{1}{v}\frac{d\vec{r}}{dt} \ .$$

Wenn die Raumkurve nicht mit der Zeit, sondern mit der Weglänge parametrisiert ist, läßt sich der Tangentenvektor besonders einfach berechnen

$$\vec{e}_t = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \ .$$

Die zeitliche Änderung des Tangentenvektors liegt in der lokalen Krümmungsebene der Kurve und zeigt in Richtung des lokalen Krümmungsmittelpunkts. Der Einheitsvektor in diese Richtung wird Normalenvektor $\vec{e}_n$ genannt,

$$\vec{e}_n = \frac{d\vec{e}_t}{ds}/|\frac{d\vec{e}_t}{ds}| \ .$$

Wir legen nun ein Koordinatensystem in die lokale Krümmungsebene mit dem Ursprung im Krümmungsmittelpunkt. Mit dem lokale Krümmungsradius ρ und mit der Krümmung $\kappa = 1/\rho$ können wir Polarkoordinaten einführen und schreiben

$$\begin{aligned} \vec{e}_n &= \cos(\phi)\vec{e}_x + \sin(\phi)\vec{e}_y \ , \\ \vec{e}_t &= -\sin(\phi)\vec{e}_x + \cos(\phi)\vec{e}_y \ . \end{aligned}$$

Wegen $ds/d\phi = \rho$ gilt

$$\frac{d\vec{e}_t}{ds} = \kappa \frac{d\vec{e}_t}{d\phi} = \kappa \vec{e}_n \ .$$

Der Binormalenvektor ist durch $\vec{e}_b = \vec{e}_t \times \vec{e}_n$ definiert. Die Vektoren $\vec{e}_n$, $\vec{e}_b$ und $\vec{e}_t$ bilden das sogenannte begleitende Dreibein der Kurve $\vec{r}(s)$. Die Änderung des Binormalenvektors steht senkrecht auf $\vec{e}_b$, denn

$$\frac{d\vec{e}_b}{ds} \cdot \vec{e}_b = \frac{1}{2} \frac{d(\vec{e}_b \cdot \vec{e}_b)}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d(1)}{ds} = 0 \ .$$

Außerdem steht sie wegen

$$\frac{d\vec{e}_b}{ds} = \frac{d(\vec{e}_t \times \vec{e}_n)}{ds} = \kappa \vec{e}_n \times \vec{e}_n + \vec{e}_t \times \frac{d\vec{e}_n}{ds}$$

senkrecht auf $\vec{e}_t$. Die Änderung $d\vec{e}_b/ds$ des Binormalenvektors entlang der Raumkurve muß also parallel zu $\vec{e}_n$ sein,

$$\frac{d\vec{e}_b(s)}{ds} = -\tau(s) \vec{e}_n(s) \ .$$

Der Faktor $\tau(s)$ wird Torsion genannt und gibt an, wie schnell sich die lokale Krümmungsebene um die Kurve $\vec{r}(s)$ dreht. Die Änderung des Normalenvektors ergibt sich zu

$$\frac{d\vec{e}_n}{ds} = \frac{d}{ds}(\vec{e}_b \times \vec{e}_t) = -\tau \vec{e}_n \times \vec{e}_t + \kappa \vec{e}_b \times \vec{e}_n = \tau \vec{e}_b - \kappa \vec{e}_t \ .$$

Zusammenfassend ergeben sich also die folgenden Gleichungen, die als Frenetsche Formeln bekannt sind,

$$\begin{aligned}
\vec{e}_t(s) &= \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \ , \quad \vec{e}_n(s) = \frac{1}{\kappa} \frac{d\vec{e}_t(s)}{ds} \ , \quad \vec{e}_b(s) = \vec{e}_t(s) \times \vec{e}_n(s) \ , \\
\kappa(s) &= |\frac{d\vec{e}_t(s)}{ds}| \ , \quad \tau(s) = -\frac{d\vec{e}_b(s)}{ds} \cdot \vec{e}_n(s) \ , \\
\frac{d\vec{e}_t(s)}{ds} &= \kappa(s) \vec{e}_n(s) \ , \quad \frac{d\vec{e}_n(s)}{ds} = \tau(s) \vec{e}_b(s) - \kappa(s) \vec{e}_t(s) \ , \quad \frac{d\vec{e}_b(s)}{ds} = -\tau(s) \vec{e}_n(s)
\end{aligned}$$

Berechne das Frenetsche Dreibein $\vec{e}_n, \vec{e}_b, \vec{e}_t$, die Krümmung $\kappa(s)$ und die Torsion $\tau(s)$ für die Raumkurven

$$\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ t \end{pmatrix} \ .$$

Lösung:

Aufgabe 1)

1. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$.
2. $\vec{\nabla} \cdot (U\vec{A}) = U(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} U$.

3. $\vec{\nabla} \times (U\vec{A}) = U\vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \times \vec{\nabla} U$.

4. $\vec{\nabla}|\vec{A}|^2 = \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{A}) = 2[\vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}]$
   oder $\vec{\nabla}|\vec{A}|^2 = 2[\vec{A} \times \vec{\nabla}) \times \vec{A} + \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})]$.

$$
\begin{aligned}
\vec{A} &= 2xy\vec{e}_x + x^2\vec{e}_y \ , \quad |\vec{A}|^2 = 4x^2y^2 + x^4 \ , \\
\vec{\nabla}|\vec{A}|^2 &= (8xy^2 + 4x^3+)\vec{e}_x + 8x^2y\vec{e}_y \ , \\
\vec{\nabla} \times \vec{A} &= 0 \ , \\
2(\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} &= 2(2xy\partial_x + x^2\partial_y)\vec{A} = 2[(4xy^2 + 2x^3)\vec{e}_x + 4x^2y\vec{e}_y] \ .
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2)

$$
\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= R\begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad v = |\frac{d\vec{r}}{dt}| = R \ , \quad \vec{r}(s) = R\begin{pmatrix} \sin(s/R) \\ \cos(s/R) \\ 0 \end{pmatrix} \ , \\
\vec{e}_t &= \begin{pmatrix} \cos(s/R) \\ -\sin(s/R) \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad \kappa = \frac{1}{R} \ , \\
\vec{e}_n &= -\begin{pmatrix} \sin(s/R) \\ \cos(s/R) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ , \quad \tau = 0 \ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ t \end{pmatrix} \ , \quad v = |\frac{d\vec{r}}{dt}| = 1 \ , \quad \vec{r}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sin(s) \\ \cos(s) \\ s \end{pmatrix} \ , \\
\vec{e}_t &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos(s) \\ -\sin(s) \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad \kappa = 1 \ , \\
\vec{e}_n &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sin(s) \\ \cos(s) \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad \vec{e}_b = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\cos(s) \\ \sin(s) \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad \tau = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ .
\end{aligned}
$$