Übungen zur Einführung in die Theoretische Physik (Rose/Hoffstätter)

5/9.5.1997, Präsenzübung Nr. 3

**Aufgabe 1)** Welche Fläche im $I\!R^3$ wird durch die Parameterdarstellung

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a + R\sin(\theta)\cos(\phi) \\ R\sin(\theta)\sin(\phi) \\ b + R\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad , \quad \theta \in [0,\pi] \ , \ \phi \in [0, 2\pi]$$

repräsentiert? Zeigen Sie durch Einsetzen und Umformen die Äquivalenz zur impliziten Form

$$(x-a)^2 + y^2 + (z-b)^2 = R^2 \ , \quad x, y, z \in R \ .$$

**Aufgabe 2)** Ein Paraboloid mit Scheitel $\vec{s} = (a, b, 0)$ hat die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(h,\phi) = \begin{pmatrix} a + h\cos(\phi) \\ a + h\sin(\phi) \\ h^2 \end{pmatrix} \ .$$

Wie lautet die implizite Darstellung? Berechnen sie die beiden Tangentenvektoren

$$\vec{t}_h = \frac{\partial \vec{r}}{\partial h} \text{ und } \vec{t}_\phi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \ ,$$

die die Tangentialebene im Punkt $\vec{r}(h,\phi)$ aufspannen. Der Normalenvektor dieser Ebene ist gegeben durch $\vec{n} = \vec{t}_h \times \vec{t}_\phi$. Der Vektor $\vec{r}(h,\phi)$ rastert eine Fläche ab, wenn $h$ und $\phi$ die Intervalle $[h, h+\Delta h]$ und $[\phi, \phi+\Delta\phi]$ durchlaufen. Zeigen Sie, daß $|\vec{n}(h,\phi)|\Delta h\Delta\phi$ bei kleinen Größen $\Delta h$ und $\Delta\phi$ näherungsweise den Flächeninhalt dieser Fläche beschreibt.

**Aufgabe 3)** Das Oberflächenintegral $\int \vec{v}\cdot d\vec{f}$ über eine Oberfläche, die in Parameterform mit den Variablen $\alpha$ und $\beta$ gegeben ist, wird folgendermaßen berechnet:

$$\int \vec{v}\cdot d\vec{f} = \int\int \vec{v}(\vec{r}(\alpha,\beta)) \cdot (\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta}) d\alpha d\beta \ .$$

Eine Glühbirne strahle eine Leistung von 100 Watt aus. Der Energiestrom geht radial nach außen und die Energiestromdichte im Abstand $r$ ist $100\text{Watt}/(4\pi r^2)$. Die vektorielle Energiestromdichte ist daher

$$\vec{s} = 100\text{Watt}\frac{\vec{e}_r}{4\pi r^2}$$

und die durch eine Fläche $F$ fließende Leistung ist gegeben durch $\int_F \vec{s}\cdot d\vec{f}$. Berechnen Sie die durch eine Kugel mit Radius $R$ um die Glühbirne strömende Leistung mit Hilfe der Parameterdarstellung der Kugel aus Aufgabe 1. Berechnen Sie weiterhin die Leistung, die einen Zylinder (Höhe $2H$, Radius $R$) durchsetzt, in dessen Mitte die Glühbirne brennt.

**Lösung:**

**Aufgabe 1)**

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a + R\sin(\theta)\cos(\phi) \\ R\sin(\theta)\sin(\phi) \\ b + R\cos(\theta) \end{pmatrix} , \\
(x-a)^2 + y^2 + (z-b)^2 &= R^2[\sin(\theta)^2\{\cos(\phi)^2 + \sin(\phi)^2\} + \cos(\theta)^2] = R^2
\end{aligned}$$

beschreibt eine Kugel mit Radius R um den Punkt $(a, 0, b)$.

**Aufgabe 2)**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + h\cos(\phi) \\ b + h\sin(\phi) \\ h^2 \end{pmatrix}$$

führt zur impliziten Darstellung

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - z = 0 \ .$$

$$\begin{aligned}
\vec{t}_h &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial h} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 2h \end{pmatrix} , \\
\vec{t}_\phi &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -h\sin(\phi) \\ h\cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Die beiden Vektoren schließen zwischen sich einen Winkel $\alpha$ ein. Die zwei kurze Vektoren $\Delta h \vec{t}_h$ und $\Delta\phi \vec{t}_\phi$ spannen ein Trapez der Fläche $\Delta h \Delta\phi \sin(\alpha) = \Delta h \Delta\phi |\vec{t}_h \times \vec{t}_\phi|$ auf. Diese Fläche wird von dem Vektor $\vec{r}(h + \delta h, \phi + \delta\phi)$ näherungsweise abgerastert, wenn bei

$$\vec{r}(h + \delta h, \phi + \delta\phi) \approx \vec{r}(h, \phi) + \frac{\partial \vec{r}}{\partial h}\delta h + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\delta\phi \ ,$$

die Größen $h + \delta h \in [h, h + \Delta h]$ und $\phi + \delta\phi \in [\phi, \phi + \Delta\phi]$.

**Aufgabe 3)**

$$\begin{aligned}
\vec{r}(\theta, \phi) &= R \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} , \\
\vec{t}_\theta &= R \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} ,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{t}_\phi &= R \begin{pmatrix} -\sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \ , \\
\vec{n} &= \vec{t}_\theta \times \vec{t}_\phi = R^2 \begin{pmatrix} \sin(\theta)^2\cos(\phi) \\ \sin(\theta)^2\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix} \ , \\
\vec{s} &= 100\mathrm{Watt}\frac{1}{4\pi R^2} \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \ , \\
\int \vec{s}\cdot d\vec{f} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \vec{s}\cdot\vec{n} d\theta d\phi \\
&= \frac{100\mathrm{Watt}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(\theta) d\theta d\phi \\
&= 100\mathrm{Watt}\ .
\end{aligned}
$$

Bei der Behandlung des Zylinders unterteilt man die Oberfläche in drei Teile: 1. den Mantel (parametrisiert durch $h \in [-H, H]$ und $\phi \in [0, 2\pi]$), 2. die Oberseite und 3. die Unterseite (parametrisiert durch $\rho \in [0, R]$ und $\phi \in [0, 2\pi]$).

$$
\begin{aligned}
\int \vec{s}\cdot d\vec{f} &= \frac{100\mathrm{Watt}}{4\pi}\{\int_{-H}^{H}\int_0^{2\pi}\frac{R}{(R^2+h^2)^{3/2}}R d\phi dh + 2\int_0^{R}\int_0^{2\pi}\frac{H}{(H^2+\rho^2)^{3/2}}\rho d\phi d\rho\} \\
&= \frac{100\mathrm{Watt}}{2}\{[\frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}]_{-H}^{H} + [-\frac{2H}{\sqrt{H^2+\rho^2}}]_0^{R}\} \\
&= 100\mathrm{Watt}\ .
\end{aligned}
$$