Übungen zur Einführung in die Theoretische Physik (Rose/Hoffstätter)

15/16.5.1997, Präsenzübung Nr. 4

Aufgabe 1) Gegeben sei ein Strömungsfeld

$$\vec{v}(x,y) = \frac{x\vec{e}_y - y\vec{e}_x}{x^2+y^2} \ , \quad x,y \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \ . \tag{1}$$

a) Berechnen Sie die Rotation dieses Strömungsfeldes für den Definitionsbereich.

b) Die Formel

$$\int_{\delta F} \vec{v}\cdot d\vec{r} = \int_F (\vec{\nabla}\times\vec{v})\cdot d\vec{a}$$

faßt den Stokes'schen Satz zusammen. Dabei ist F eine einfach zusammenhängende Oberfläche und δF deren Rand. (Einfach zusammenhängend bedeutet anschaulich, daß man jede geschlossene Kurve auf F zu einem beliebigen Punkt in F zusammenziehen kann).

Berechnen Sie

$$\oint \vec{v}\cdot d\vec{r} = \oint \vec{v}\cdot\frac{d\vec{r}(\phi)}{d\phi}d\phi \tag{2}$$

entlang der Raumkurve $\vec{r}(\phi) = a[\cos(\phi)\vec{e}_x + \sin(\phi)\vec{e}_y]$, $\phi\in[0,2\pi]$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Oberflächenintegral $\int(\vec{\nabla}\times\vec{v})\cdot d\vec{a}$ über die eingeschlossene Fläche, den Ursprung ausgenommen. Bestätigt dieses Beispiel den Stokes'schen Satz? Was läßt sich über die Rotation am Ursprung sagen?

c) Zeichnen Sie ein Stromlinienbild des unter (1) gegebenen Strömungsfeldes und erläutern sie anschaulich, wieso das Umlaufintegral (2) nicht vom Radius abhängt.

Lösung:

Aufgabe 1)

a) Für $x,y,\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt

$$\text{rot}\vec{v} = \vec{\nabla}\times\vec{v} = 0 \ .$$

Selbst am Ursprung ist die Rotation im allgemeinen definiert, denn dort gilt

$$\text{rot}\vec{v} = \lim_{\delta F\to 0}\frac{1}{F}\oint\vec{v}\cdot d\vec{r} \ ,$$

wobei F eine Fläche ist, die den Ursprung enthält.

b)

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\phi} d\phi &= \int_0^{2\pi} \frac{x\vec{e}_y - y\vec{e}_x}{x^2+y^2} \cdot a[-\sin(\phi)\vec{e}_x + \cos(\phi)\vec{e}_y] d\phi \\
&= \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} a \frac{\cos(\phi)\vec{e}_y - \sin(\phi)\vec{e}_x}{a^2} \cdot a[-\sin(\phi)\vec{e}_x + \cos(\phi)\vec{e}_y] d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi
\end{aligned}$$

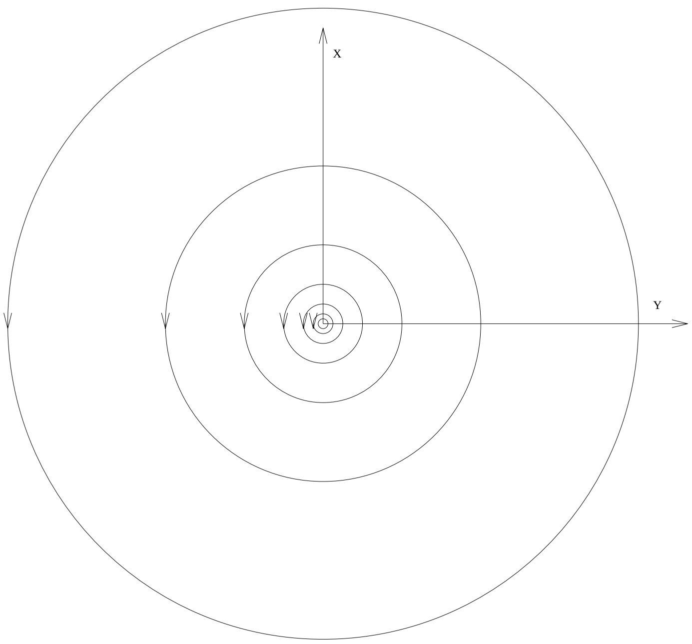
Daraus ergibt sich, daß die Rotation am Ursprung divergiert, denn

$$\frac{1}{F} \oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\phi} d\phi = \frac{2}{a^2}$$

geht gegen Unendlich, wenn der Radius gegen Null geht.

Dieses Beispiel bestätigt den Stokes'schen Satz zwar nicht, stellt aber auch kein Widerspruch zu ihm dar, denn das Gebiet $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.

c) Das Stomlinienbild besteht aus Kreisen um den Ursprung. In einem Stomlinienbild ist die Dichte der Stromlinien proportional zur Stärke des Vektorfeldes und nimmt hier daher linear mit dem Abstand vom Ursprung ab. Das Umlaufintegral (2) ist



unabhängig vom Radius, denn die Zunahme des Integrationsweges mit dem Radius wird kompensiert durch die Abnahme von $|\vec{v}|$.