Übungen zur Einführung in die Theoretische Physik (Rose/Hoffstätter)

15/16.5.1997, Präsenzübung Nr. 5

Aufgabe 1) Die Taylorreihe um den Wert $x = x_0$ einer unendlich oft differenzierbaren Funktion $f(x)$ ist definiert als

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right)\bigg|_{x_0} (\Delta_x)^n \ , \quad \Delta_x = x - x_0 \ .$$

In vielen relevanten Fällen konvergiert diese Reihe gegen den Funktionswert $f(x)$, insbesondere wenn x in der Nahe von x_0 liegt, $|\Delta_x|$ also klein ist.

a) Auch für mehrdimensionale Funktionen $F(\vec{r})$ läßt sich eine Taylorreihe um einen Punkt $\vec{r}_0$ berechenen. Dazu führt man den relativen Abstand s von diesem Punkt ein und schreibt $f(s) = F(\vec{r})$ mit $\vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{\Delta}_r$ und $\vec{\Delta}_r = \vec{r} - \vec{r}_0$. Die Funktionswerte $f(1)$ und $F(\vec{r})$ stimmen dann überein. Mittels der Produktregel erhält man die Taylorreihe der Funktion $f(s)$ zu

$$\begin{aligned} T_f(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \frac{d^n f(s)}{ds^n} \right)\bigg|_{0} s^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} [\frac{dx}{ds}\partial_x + \frac{dy}{ds}\partial_y + \frac{dz}{ds}\partial_z]^n F(\vec{r}) \right)\bigg|_{\vec{r}_0} s^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} [\vec{\Delta}_r \vec{\nabla}]^n F(\vec{r}) \right)\bigg|_{\vec{r}_0} s^n \ . \end{aligned}$$

Für $s = 1$ erhält man daraus die Taylorreihe der Funktion $F(\vec{r})$ zu

$$T_F(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\vec{\Delta}_r \vec{\nabla}]^n F(\vec{r})\bigg|_{\vec{r}_0} \ , \quad \vec{\Delta}_r = \vec{r} - \vec{r}_0 \ . \tag{1}$$

Nähert man die Funktion $fF(x, y)$ durch Ihr Taylorpolynom bis zur zweiten Ordnung in Bezug auf die x–Abhänigkeit, so erhält man

$$F(x, y) \approx F(x_0, y) + \partial_x F(x, y)|_{x_0} \Delta_x + \frac{1}{2}\partial_x^2 F(x, y)\bigg|_{x_0} \Delta_x^2 \ .$$

Nähert man diese Funktion nun durch eine Taylorreihe um y_0 bis zu zweiter Ordnung in Bezug auf y so ergibt sich

$$\begin{aligned} F(x, y) \ &\approx \ F(x_0, y_0) + \partial_x F(x, y_0)|_{x_0} \Delta_x + \frac{1}{2}\partial_x^2 F(x, y_0)\bigg|_{x_0} \Delta_x && (2) \\ &+ \ \partial_y F(x_0, y)|_{y_0} \Delta_y + \partial_y \partial_x F(x, y)|_{(x_0, y_0)} \Delta_x \Delta_y && (3) \\ &+ \ \frac{1}{2}\partial_y^2 F(x_0, y)\bigg|_{y_0} \Delta_y^2 \ . && (4) \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß diese Näherung dem Taylorpolynom von $F(x, y)$ bis Ordnung 2 aus Gleichung (1) entspricht.

b) Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$F(x, y) = xy^2 + x^3$$

um $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Aufgabe 2) Gegeben sei ein skalares Feld $F(\vec{r})$. Die Flächen konstanten Potentials haben die Parameterdarstellung

$$F(\vec{r}) = C$$

mit einer Konstanten C. Sei nun s die Bogenlänge entlang einer Kurve, die auf einer solchen Equipotentialfläche liegt. Dann ändert sich $F(\vec{r})$ nicht, wenn sich $\vec{r}(s)$ entlang dieser Kurve bewegt. Somit gilt

$$\frac{dF(\vec{r}(s))}{ds} = 0 \ .$$

Daraus follgt direkt, daß $\vec{\nabla} F(\vec{r})$ senkrecht auf der Equipotentialfläche steht, denn

$$\frac{dF(\vec{r}(s))}{ds} = \partial_x F(\vec{r})\frac{dx}{ds} + \partial_y F(\vec{r})\frac{dy}{ds} + \partial_z F(\vec{r})\frac{dz}{ds} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \vec{\nabla} F(\vec{r}) = \vec{e}_t \cdot \vec{\nabla} F(\vec{r}) = 0 \ .$$

Hier ist $\vec{e}_t$ der Tangentialvektor entlang der beschriebenen Kurve. Da $\vec{\nabla} F(\vec{r})$ somit senkrecht auf jedem Tangentialvektor der Equipotentialfläche steht, steht der Gradient senkrecht auf dieser Fläche.

Stellen sie den Tangentialvektor der Feldlinie durch den Punkt $\vec{r}$ mittels des Gradienten dar. Berechnen sie außerdem mittels der Frenetschen Formeln die Krümmung und die Torsion der Feldlinien des skalaren Feldes $F(\vec{r})$.

Berechnen Sie das Frenetsche Dreibein und die Krümmung der Feldlinien für den Fall $F(x, y, z) = x/y$, $y \neq 0$.

Lösung:

Aufgabe 1)

a)

$$\begin{aligned}
F(x, y) &\approx F(x_0, y_0) + (\vec{\Delta}_r \cdot \vec{\nabla}) F(x, y)\Big|_{\vec{r}_0} + (\vec{\Delta}_r \cdot \vec{\nabla})^2 F(x, y)\Big|_{\vec{r}_0} \\
&= F(x_0, y_0) + (\Delta_x \partial_x + \Delta_y \partial_y) F(x, y)|_{\vec{r}_0} + \frac{1}{2}(\Delta_x \partial_x + \Delta_y \partial_y)^2 F(x, y)\Big|_{\vec{r}_0} \\
&= F(x_0, y_0) + \partial_x F(x, y_0)|_{x_0} \Delta_x + \frac{1}{2}\partial_x^2 F(x, y_0)\Big|_{x_0} \Delta_x + \partial_y F(x_0, y)|_{y_0} \Delta_y \\
&\quad + \partial_y \partial_x F(x, y)|_{\vec{r}_0} \Delta_x \Delta_y + \frac{1}{2}\partial_y^2 F(x_0, y)\Big|_{y_0} \Delta_y^2 \ .
\end{aligned}$$

b) Alle partielle Ableitungen verschwinden bei $(0,0)$, außer

$$\partial_x \partial_y^2 F(x,y)\Big|_{(0,0)} = 2 \ , \quad \partial_x^3 F(x,y)\Big|_{(0,0)} = 6 \ .$$

Für die Taylorreihe folgt

$$T_F(x,y) = \frac{1}{2}\partial_x \partial_y^2 F(x,y)\Big|_{(0,0)} xy^2 + \frac{1}{6}\partial_x^3 F(x,y)\Big|_{(0,0)} x^3 = F(x,y) \ .$$

Aufgabe 2) Hier sei s die Bogenlänge entlang der Feldlinie, dann folgt mit den Frenetschen Formeln

$$\begin{aligned}
\vec{e}_t &= \frac{\vec{\nabla} F}{|\vec{\nabla} F|} \ , \\
\kappa &= \left|\frac{d\vec{e}_t}{ds}\right| = \left|(\frac{dx}{ds}\partial_x + \frac{dy}{ds}\partial_y + \frac{dz}{ds}\partial_z)\vec{e}_t\right| = \left|(\vec{e}_t \cdot \vec{\nabla})\vec{e}_t\right| \\
&= \left|\frac{1}{|\vec{\nabla} F|}(\vec{\nabla} F \cdot \vec{\nabla})\frac{\vec{\nabla} F}{|\vec{\nabla} F|}\right| \ .
\end{aligned}$$

Für das Beispiel $F(x,y) = x/y$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} F &= \frac{1}{y^2}\begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \ , \\
\vec{e}_t &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \ , \\
\frac{d\vec{e}_t}{ds} &= (\vec{e}_t \cdot \vec{\nabla})\vec{e}_t = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(y\partial_x - x\partial_y)\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} \ , \\
\kappa &= \left|\frac{d\vec{e}_t}{ds}\right| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \ , \\
\vec{e}_n &= \frac{1}{\kappa}\frac{d\vec{e}_t}{ds} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \ , \\
\vec{e}_b &= \vec{e}_t \times \vec{e}_n = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \\
\tau &= \vec{e}_b \cdot \frac{d\vec{e}_n}{ds} = \vec{e}_b[(\vec{e}_t\vec{\nabla})\vec{e}_n] = 0 \ .
\end{aligned}$$