Übungen zur theoretischen Mechanik (Rose/Hoffstätter)

13.1.1997, Lösungen zu dem Übungsblatt Nr. 10

Aufgabe 1)

a) Die Gesamtlänge des Fadens sei l. Die Länge vom Umkehrpunkt A bis zur Masse m sei x. Die Geschwindigkeit der Masse m lautet

$$\dot{\vec{x}} = \dot{x} \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} x\dot{\phi} \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} . \tag{1}$$

Daraus ergibt sich die kinetische Energie zu

$$T = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + x^2\dot{\phi}^2) . \tag{2}$$

Der Nullpunkt der potentiellen Energie liege auf der Höhe des Umkehrpunktes A. Die potentielle Energie schreibt sich dann als

$$V = -mgx\cos\phi - Mg(l-x)\sin\alpha . \tag{3}$$

Kinetische und potentielle Energie werden in die Lagrange-Funktion L eingesetzt,

$$L = T - V = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + x^2\dot{\phi}^2) + mgx\cos\phi + Mg(l-x)\sin\alpha , \tag{4}$$

woraus mit

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0,\ q_1 = x,\ q_2 = \phi \tag{5}$$

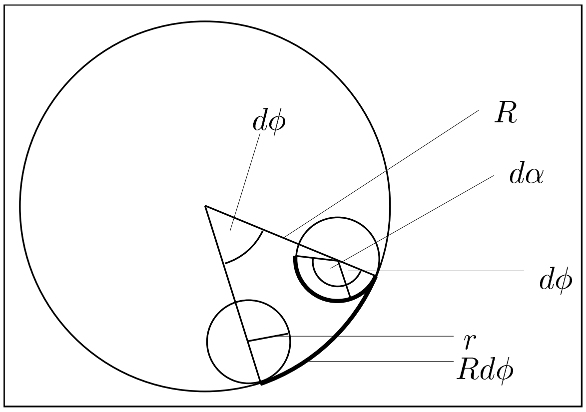
die Bewegungsgleichungen für x und ϕ folgen. Sie lauten

$$(m+M)\ddot{x} - mx\dot{\phi}^2 - mg\cos\phi + Mg\sin\alpha = 0 , \tag{6}$$

$$x\ddot{\phi} + 2\dot{x}\dot{\phi} + g\sin\phi = 0 . \tag{7}$$

b) Aus $\dot{\phi} = 0$ folgt $\ddot{\phi} = 0$ und damit aus der Bewegungsgleichung für ϕ (7) $\phi = 0$. Setzen wir dies in die Bewegungsgleichung für x (6) ein, erhalten wir $\ddot{x} = \frac{g(m - M\sin\alpha)}{m+M}$.

Aufgabe 2) Der Winkel α beschreibt die Drehung des inneren Zylinders um seine Achse und ϕ die Lage bezüglich des äußeren Zylinders. Durch Verschiebung um den Winkel $d\phi$ legt der Zylinder eine Strecke $R\,d\phi$ zurück. Gleichzeitig dreht sich der Zylinder um den Winkel $d\alpha$. Zusätzlich verschiebt sich der Auflagepunkt aufgrund der Krümmung des äußeren, festen Zylinders um den Winkel $d\phi$.



Damit gilt die Rollbedingung

$$r(d\alpha + d\phi) = Rd\phi \ , \tag{8}$$

bzw.

$$r(\dot{\alpha} + \dot{\phi}) = R\dot{\phi} \ , \tag{9}$$

Als körperfesten Punkt wählen wir den Schwerpunkt, so daß sich die kinetische Energie aus der Rotations- und der Translationsenergie wie folgt zusammensetzt

$$T = T_{rot} + T_{trans} = \frac{1}{2}\theta\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\phi}^2 \ . \tag{10}$$

Mit $\theta = \frac{m}{2}r^2$ als Trägheitsmoment und der Rollbedingung läßt sich T schreiben als

$$T = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\phi}^2 \ . \tag{11}$$

Die potentielle Energie, vom Mittelpunkt des festen Zylinders aus betrachtet, lautet

$$V = -mg(R-r)\cos\phi \tag{12}$$

und somit die Lagrange-Funktion L

$$L = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\phi}^2 + mg(R-r)\cos\phi \ . \tag{13}$$

Aus den Lagrange-Gleichungen berechnet sich dann die Bewgungsgleichung für ϕ zu

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{3}\frac{g}{R-r}\sin\phi = 0 \ . \tag{14}$$

Für kleine Winkel linearisieren wir $\sin\phi \simeq \phi$ und erhalten die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators. Die allgemeine Lösung lautet dann

$$\phi = A\cos\omega t + B\sin\omega t \text{ mit } \omega^2 = \frac{2}{3}\frac{g}{R-r} \ . \tag{15}$$