Übungen zur theoretischen Mechanik (Rose/Hoffstätter)

20.1.1997, Übungsblatt Nr. 11

Aufgabe 1) An einem Berghang mit dem Profil $z = -y^2/a$ soll eine Bahnlinie vom Punkt $(-x_0, y_0)$ zum Punkt (x_0, y_0) geführt werden. Auf den Schienen kann ein Wagen reibungsfrei fahren.

a) Wie muß die Trasse $z(x)$ verlaufen, damit der mit $v_0 = y_0\sqrt{2g/a}$ startende Wagen den Punkt (x_0, y_0) ohne weiteren Antrieb in der kürzesten Zeit erreicht? Es wirkt die Schwerkraft $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$. Bei der Lösung der Aufgabe soll angenommen werden, daß für alle erreichten Werte von y gilt: $y^2 << a^2$.

   Bei der Lösung kann unter Umständen folgende Ableitung nützlich sein:

$$\frac{d}{dx}\ln(1 + y'^2) = \frac{2y'y''}{1 + y'^2} \ .$$

b) Wie groß ist in diesem Fall die Fahrzeit? Die folgende Beziehung kann bei der Rechnung nützlich werden:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} \ .$$