Übungen zur theoretischen Mechanik (Rose/Hoffstätter)

20.1.1997, Lösungen zu dem Übungsblatt Nr. 11

Aufgabe 1)

a) Gegeben sind die Punkte $P_- = (-x_0, y_0)$ und $P_+ = (x_0, y_0)$. Die Laufzeit läßt sich bestimmen durch

$$T = \int_{P_-}^{P_+} \frac{ds}{v}. \tag{1}$$

Aus der Energieerhaltung folgt die Gleichung

$$\frac{m}{2}v^2 + mgz = \frac{m}{2}v^2 - mg\frac{y^2}{a} = const. = \frac{m}{2}v_0^2 - mg\frac{y_0^2}{a}. \tag{2}$$

Wegen $v_0 = \sqrt{\frac{2g}{a}}y_0$ ergibt sich hieraus $v^2 = \frac{2g}{a}y^2$. Das Linienelement, wird nun umgeformt zu

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dx\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2 + (\frac{dz}{dx})^2}\text{ , mit} \tag{3}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{a}\frac{dy}{dx}. \tag{4}$$

Man erhält nun

$$ds = dx\sqrt{1 + y'^2(1 + \frac{4y^2}{a^2})} \approx dx\sqrt{1 + y'^2}. \tag{5}$$

Das Integral für die Laufzeit T wird nun

$$T = \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{\frac{a}{2g}}F dx = min.\text{ , mit } F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y}\ . \tag{6}$$

Die Euler-Ableitung des Extremalproblems ist

$$(\frac{\partial F}{\partial y'})' = \frac{\partial F}{\partial y}. \tag{7}$$

Aus der letzten Gleichung erhält man durch Einsetzen

$$(\frac{\partial F}{\partial y'})' = (\frac{1}{y}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}})' = (\frac{y''}{\sqrt{1 + y'^2}} - \frac{y'^2 y''}{(1 + y'^2)^{3/2}})\frac{1}{y} - \frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}}\frac{1}{y^2}\ , \tag{8}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}\sqrt{1 + y'^2} \tag{9}$$

Dies ergibt eine Differentialgleichung die sich bestimmt zu

$$y'' - \frac{y'^2 y''}{1+y'^2} - \frac{y'^2}{y} = -\frac{1}{y}(1+y'^2). \tag{10}$$

Wobei $y'' - \frac{y'^2 y''}{1+y'^2} = \frac{y''}{1+y'^2} = -\frac{1}{y}$ gilt. Somit ist

$$y'' \frac{y'}{1+y'^2} = -\frac{y'}{y} \text{ , und } \frac{1}{2}\ln(1+y'^2)' = -(\ln y)'. \tag{11}$$

Durch Integration gelangt man zu der Gleichung

$$\frac{1}{2}(\ln(1+y'^2) - \ln(1+y_0'^2)) = -\ln y + \ln y_0 \text{ , oder} \tag{12}$$

$$\frac{1+y'^2}{1+y_0'^2} = \frac{y_0^2}{y^2}. \tag{13}$$

Hieraus folgt

$$y' = \sqrt{\frac{y_0^2(1+y_0'^2)}{y^2} - 1} = \sqrt{\frac{K}{y^2} - 1}. \tag{14}$$

Das ergibt

$$\frac{y dy}{\sqrt{K - y^2}} = dx. \tag{15}$$

Nach erneuter Integration erhält man

$$-\sqrt{K-y^2} + \sqrt{K-y_0^2} = x - x_1 \text{ , mit } x_1 = -x_0 \text{ ,} \tag{16}$$

$$|y_0 y_0'| - \sqrt{K-y^2} = x + x_0 \text{ .} \tag{17}$$

Nach Quadrieren und mit Gleichung (14) erhält man

$$(x+x_0)^2 - 2(x+x_0)|y_0 y_0'| + y_o^2 y_0'^2 = K - y^2 = y_0^2 - y^2 + y_0^2 y_0'^2. \tag{18}$$

Dies ist die Gleichung für die Bahn mit minimalem Zeitaufwand. Für $y = y_0$ findet man

$$(x+x_0)^2 - 2(x+x_0)|y_0 y_0'| = 0 \quad \text{, mit } x_1 = -x_0, x_2 = 2|y_0 y_0'| - x_0. \tag{19}$$

Damit der Wagen in P_+ ankommt muß also gelten $|y_0 y_0'| = x_0$. Damit geht Gleichung (18) über in

$$y_0^2 - y^2 = x^2 - x_0^2 \text{ oder } x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2. \tag{20}$$

Die Strecke muß also um einen Kreis um den Punkt (0,0) geführt werden!

b) Die Zeit T finden wir jetzt einfach durch Integration über den Kreis

$$ds \approx \sqrt{dx^2 + dy^2} = R d\varphi \ , \text{ mit } R^2 = x_0^2 + y_0^2. \tag{21}$$

Mit $v = \sqrt{\frac{2g}{a}y}$ folgt aus Gleichung (1),

$$T = \sqrt{\frac{a}{2g}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{R d\varphi}{y} = \sqrt{\frac{a}{2g}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{R d\varphi}{R\cos\varphi} = \sqrt{\frac{2a}{g}} \int_{0}^{\alpha} \frac{d\varphi}{\cos\varphi}. \tag{22}$$

Wobei α durch $\sin\alpha = \frac{x_0}{R}$ gegeben ist,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sin(\varphi + \pi/2)} = \int_0^\alpha \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{\sin(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4})\cos(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4})} \qquad (23) \\ &= \int_0^\alpha \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{\tan(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4})\cos^2(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4})} = \ln\tan(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4})|_0^\alpha = \ln\tan\frac{\alpha + \pi/2}{2}, \end{aligned}$$

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}}, \tag{24}$$

daraus folgt $I = \ln\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha+\pi/2)}{1+\cos(\alpha+\pi/2)}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$. Das Ergebnis ist dann

$$T = \sqrt{\frac{a}{2g}} \ln\frac{R + x_0}{R - x_0} \ . \tag{25}$$