Übungen zur theoretischen Mechanik (Rose/Hoffstätter)

27.1.1998, Übungsblatt Nr. 12

Aufgabe 1) Für die Gesamtenergie des Teilchens im Potential gilt

$$H = T + V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V = \frac{p_x^2}{2m} + A\Big((\frac{x}{x_0})^4 - (\frac{x}{x_0})^2\Big) \ .$$

Daraus ergibt sich

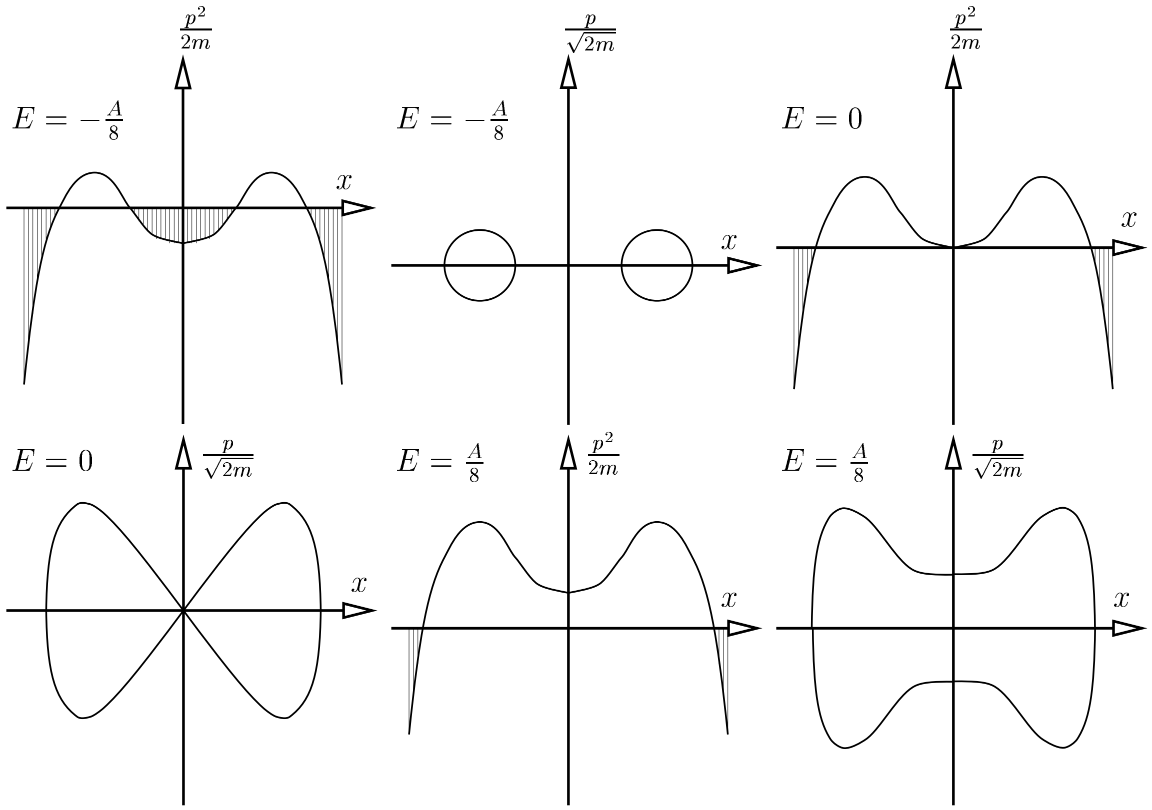
$$\frac{p_x^2}{2m} = E - A\Big((\frac{x}{x_0})^4 - (\frac{x}{x_0})^2\Big) \ .$$

Wir tragen zuerst $\frac{p_x^2}{2m}$ als Funktion von x auf. Um einfacher zeichnen zu können, bestimmen wir die Extrema von V bezüglich x.

$$\frac{dV}{dx} = \frac{A}{x_0}\Big(4(\frac{x}{x_0})^3 - 2(\frac{x}{x_0})\Big) \stackrel{!}{=} 0$$

1. $x = 0, V = 0$
2. $\left(\frac{x}{x_0}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, V = -\frac{1}{4}A$

Wir skizzieren $\frac{p^2}{2m}$ für $E = -\frac{A}{8}$, $E = 0$ und $E = \frac{A}{8}$, wobei in den schraffierten Bereichen keine Lösung existiert.



Für die Bereiche, in denen $\frac{p_x^2}{2m} > 0$ ist, existieren Lösungen für $\frac{p_x}{\sqrt{2m}}$, daß heißt, auf den erlaubten Bereichen muß die Wurzel aus $\frac{p_x^2}{2m}$ gezogen werden, um die Trajektorie im $x - p_x$–Raum zu erhalten.

Aufgabe 2) Die kinetische Energie setzt sich zusammen aus Rotations- und Translationsenergie.

$$T = \frac{\Theta}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2}\dot{x}^2$$

Die Abrollbedingung des Fadens ergibt $R\dot{\varphi} = \pm\dot{x}$. Damit kann man für die kinetische Energie schreiben

$$T = \frac{\dot{x}^2}{2}\Big(\frac{\Theta}{R^2} + m\Big) \ .$$

Für die potentielle Energie gilt $V = -mgx$. Die Gesamtenergie lautet daher

$$H = T + V = B\frac{\dot{x}^2}{2} - mgx$$

mit der Abkürzung $B = \Big(\frac{\Theta}{R^2} + m\Big)$. Wir berechnen $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = B\dot{x}$. H läßt sich jetzt folgendermaßen schreiben

$$H = \frac{p_x^2}{2B} - mgx = const. = E \ .$$

Die Konstante bestimmen wir mit Hilfe der Anfangsbedingungen, welche lauten

$$x = 0, \quad p_x = 0 \ .$$

Daraus ergibt sich $E = 0$. Wir erhalten folgende Gleichung

$$\frac{p_x^2}{2B} = mgx \ .$$

Lösen wir die Gleichung nach $\frac{p_x}{\sqrt{2Bmgh}}$ auf und beachten, daß bei $x = 0$ die Geschwindgkeit $\dot{\varphi}$ erhalten bleibt, aber $\dot{x}$ und damit p_x das Vorzeichen wechselt, erhalten wir folgende Kurve im Phasenraum