Übungen zur theoretischen Mechanik (Rose/Hoffstätter)

3.2.1997, Übungsblatt Nr. 13

Aufgabe 1) Zwei Massenpunkte bewegen sich unter Einfluß der Gravitation um ihren gemeinsamen Schwerpunkt. Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion

$$H(p_r, p_\phi, p_u, r, \phi, u) \ , \quad u = \cot\theta \ .$$

r, θ, ϕ sind Kugelkoordinaten im Koordinatensystem mit Ursprung im Schwerpunkt. Die z–Achse des Koordinatensystems soll eine beliebige Orientierung zur Verbindungslinie zwischen den Massepunkten haben. Welche Anfangsbedingungen müssen $\dot\theta$ und $\dot\phi$ erfüllen, damit sich der Abstand r im Laufe der Zeit nicht ändert?

Zur Beantwortung dieser Frage stelle man die Hamiltonschen Gleichungen auf. Aus $r = const$ ergibt sich $p_u(u)$. Mit den Ausdrücken für die kanonischen Impulse läßt sich hieraus eine Differentialgleichung für $u(\phi)$ berechnen und lösen. Mit Hilfe dieser Lösung lassen sich die gesuchten Anfangsbedingungen bestimmen.