Übungen zur theoretischen Mechanik (Rose/Hoffstätter)

3.2.1998 , Lösungen zu dem Übungsblatt Nr. 13

Aufgabe 1) Die Lagrange-Funktion für zwei Massenpunkte unter dem Einfluß der Gravitation lautet

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^{\,2} + \gamma\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}\,. \tag{1}$$

Der Schwerpunkt der beiden Massenpunkte bildet den Ursprung des Koordinatensystems.

$$\vec{r}_s = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_1} = 0 \,\rightarrow\, m_1\vec{r}_1 = -m_2\vec{r}_2\,. \tag{2}$$

Elminiert man mittels obiger Gleichung die Koordinate $\vec{r}_2$ in der Lagrange-Funktion, so erhält man

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2}(1+\frac{m_1}{m_2}) + \gamma\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1|(1+\frac{m_1}{m_2})} = \frac{m_1^2}{2m}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \gamma\frac{m\,m_2}{|\vec{r}_1|} \tag{3}$$

wobei $m = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ die reduzierte Masse ist. Beim Übergang zu Kugelkoordinaten erhält man für die Geschwindigkeit der ersten Masse

$$\dot{\vec{r}}_1^{\,2} = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\sin\theta\dot{\phi})^2\,. \tag{4}$$

Substituiert man nun θ durch $u = \cot\theta$, so folgt $\dot{\theta}$ aus

$$\dot{u} = -\frac{1}{\sin^2\theta}\dot{\theta} = -(1+\cot^2\theta)\dot{\theta} = -(1+u^2)\dot{\theta}\,. \tag{5}$$

Die Lagrange-Funktion in den Variablen $r, \phi, u, \dot{r}, \dot{\phi}, \dot{u}$ lautet dementsprechend

$$L(r,\phi,u,\dot{r},\dot{\phi},\dot{u}) = \frac{m_1^2}{2m}(\dot{r}^2 + r^2(\frac{\dot{u}^2}{(1+u^2)^2} + \frac{\dot{\phi}^2}{1+u^2})) + \gamma\frac{m\,m_2}{r}\,. \tag{6}$$

Die kanonisch konjugierten Impulse berechnen sich zu

$$p_r = \partial_{\dot{r}}L = \frac{m_1^2}{m}\dot{r}\,, \tag{7}$$

$$p_\phi = \partial_{\dot{\phi}}L = \frac{m_1^2}{m}r^2\frac{\dot{\phi}}{1+u^2}\,, \tag{8}$$

$$p_u = \partial_{\dot{u}}L = \frac{m_1^2}{m}r^2\frac{\dot{u}}{(1+u^2)^2}\,. \tag{9}$$

Aus $H = \sum_i p_i q_i - L$ und mit der Elimination der Geschwindigkeiten durch die kanonischen Impulse folgt die Hamilton-Funktion

$$H = \frac{m}{2m_1^2}(p_r^2 + \frac{1+u^2}{r^2}p_\phi^2 + \frac{(1+u^2)^2}{r^2}p_u^2) - \gamma\frac{mm_2}{r}\,. \tag{10}$$

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\dot{r} = \frac{m}{m_1^2} p_r \,,\; \dot{p_r} = \frac{m}{m_1^2}\left(\frac{1+u^2}{r^3} p_\phi^2 + \frac{(1+u^2)^2}{r^3} p_u^2\right) - \gamma \frac{m\,m_2}{r^2}\,, \tag{11}$$

$$\dot{\phi} = \frac{m}{m_1^2}\frac{1+u^2}{r^2} p_\phi \,,\; \dot{p_\phi} = 0 \to p_\phi = const. = c\,, \tag{12}$$

$$\dot{u} = \frac{m}{m_1^2}\frac{(1+u^2)^2}{r^2} p_u \,,\; \dot{p_u} = -\frac{m}{m_1^2}\left(\frac{u}{r^2} p_\phi^2 - \frac{2(1+u^2)u}{r^2} p_u^2\right). \tag{13}$$

Falls $r = const.$ ist, folgt $\dot{r} = 0$, aus (11) $p_r = 0$ und die Forderung

$$\frac{m}{m_1^2}\left(\frac{1+u^2}{r^3} p_\phi^2 + \frac{(1+u^2)^2}{r^3} p_u^2\right) - \gamma \frac{m m_2}{r^2} = 0 \;\to p_u = \sqrt{\frac{\gamma m_1^2 m_2 r - (1+u^2)c^2}{(1+u^2)^2}}. \tag{14}$$

Diese Gleichung hat die Form $p_u = f(u)$. Betrachtet man $u = u(\phi(t))$, so ergibt die Zeitableitung $\dot{u} = \frac{du}{d\phi}\dot{\phi}$. Nun folgt mit (12) und (8) $p_u = \frac{c}{1+u^2}\frac{du}{d\phi}$. Dieses p_u wird in (14) eingesetzt.

$$\frac{du}{d\phi} = \sqrt{a^2 - u^2} \;\text{ mit }\; a^2 = \frac{\gamma m_1^2 m_2 r}{c^2} - 1\,. \tag{15}$$

Die Integration führt auf

$$\arcsin\frac{u}{a} = \phi + c_1 \;\to\; c_1 = \arcsin\frac{u(\theta(0))}{a} - \phi(0) \tag{16}$$

bzw.

$$u(\phi) = a\sin(\phi(t) + c_1)\,. \tag{17}$$

Analog wie bei der Herleitung von $\dot{u}$ folgt

$$\dot{\theta} = -\dot{u}\sin^2\theta = -\frac{du}{d\phi}\dot{\phi}\frac{1}{1+u^2} = -\frac{amc}{m_1^2 r^2}\cos(\phi(t) + c_1)\,. \tag{18}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ berechnet sich die Bedingung für $\dot{\theta}$ durch Einsetzen von c_1 zu

$$\dot{\theta}(0) = -\frac{mc}{m_1^2 r^2}\sqrt{\frac{\gamma m_1^2 m_2 r}{c^2} - 1 - \cot\theta_0}\,. \tag{19}$$

Für $\phi(0)$ folgt aus (12)

$$\dot{\phi}(0) = -\frac{mc}{m_1^2 r^2}\frac{1}{\sin\theta_0^2} \;\text{ mit }\; \theta(0) = \theta_0\,. \tag{20}$$

Ein alternativer Lösungsweg geht folgendermaßen :

$$\dot{\theta}_0 \overset{(5)}{=} -\dot{u}(0)\sin^2\theta_0 \overset{(13)}{=} -\frac{m}{m_1^2}\frac{1}{r^2\sin^2\theta_0} p_u(0) \overset{(14)}{=} -\frac{m}{m_1^2}\frac{1}{r^2}\sqrt{\gamma m_1^2 m_2 r - \frac{c^2}{\sin^2\theta_0}} \tag{21}$$

$$\text{und } \dot{\phi} \overset{(12)}{=} -\frac{mc}{m_1^2 r^2}\frac{1}{\sin\theta_0^2}\,. \tag{22}$$

Die Ziffern über den Gleichheitszeichen besagen, welche Gleichung verwendet wurde.