Übungen zur theoretischen Mechanik (Rose/Hoffstätter)

28.10.1997, Lösungen zu dem Übungsblatt Nr. 1

## Aufgabe 1)

a) Wir verwenden ein $x$-$y$ Koordinatensystem, mit Ursprung im Fußpunkt der schiefen Ebene. Der Energiesatz lautet

$$\frac{m}{2}v^2 + mgy = const = mgh \rightarrow v^2 = 2g(h-y) \; . \tag{1}$$

Auch im höchsten Punkt der Bahn soll die Zentripedalkraft noch größer als die Gravitationskraft sein :

$$m\frac{v^2}{R} \geq mg \rightarrow \frac{v^2}{R} = 2g\frac{h-2R}{R} \geq g \; . \tag{2}$$

Damit beträgt die Mindesthöhe $h = \frac{5}{2}R$.

b) Die y-Komponente lautet als Funktion von $\varphi$

$$y = R(1-\cos\varphi) \rightarrow v = \sqrt{2g(h - R(1-\cos\varphi))} \; . \tag{3}$$

c) Die schiefe Ebene wird beschrieben durch

$$y = -(\tan\alpha)x \; . \tag{4}$$

Die Bewegung des Autos nach Verlassen des höchsten Punktes entspricht der Bewegung des waagrechten Wurfes :

$$x = -v_e t \; , \tag{5}$$

$$y = 2R - \frac{1}{2}gt^2 \; . \tag{6}$$

Damit lautet die Bahnkurve $y = y(x)$

$$y(x) = 2R - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_e^2} \; . \tag{7}$$

Gesucht ist nun der Schnittpunkt der beiden Kurven.

$$2R - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_e^2} = -(\tan\alpha)x \; . \tag{8}$$

$v_e = v(\phi = \pi)$ aus Teilaufgabe b eingesetzt ergibt die quadratische Gleichung

$$x^2 - 4(h - 2R)(\tan\alpha)x - 8R(h - 2R) = 0 \ , \tag{9}$$

$$x_{1/2} = 2(h - 2R)\tan\alpha \pm 2\sqrt{(h - 2R)^2\tan^2\alpha + 2R(h - 2R)} \ . \tag{10}$$

Da im gewählten Koordinatensystem die gesuchte x-Koordinate negativ ist, lautet die Lösung

$$x_1 = 2(h - 2R)\tan\alpha - 2\sqrt{(h - 2R)^2\tan^2\alpha + 2R(h - 2R)} \ . \tag{11}$$

Die zugehörige y-Komponente lautet

$$y_1 = -(\tan\alpha)x_1 \ . \tag{12}$$

Falls $h = \frac{5}{2}R$ (s. Teilaufgabe a.) ist, folgt

$$x_1 = R\tan\alpha - R\sqrt{\tan^2\alpha + 4} \ . \tag{13}$$