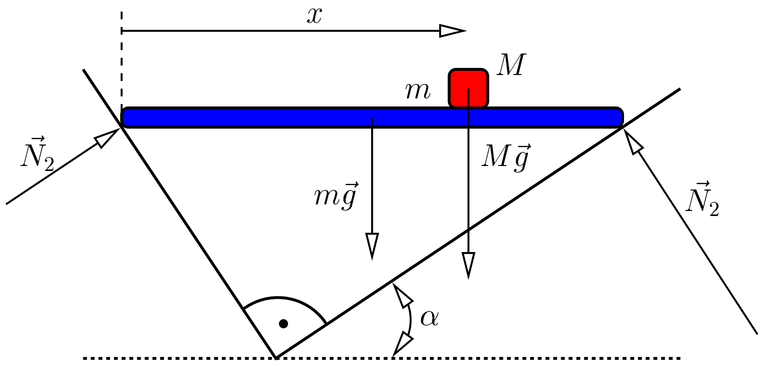
Übungen zur theoretischen Mechanik (Rose/Hoffstätter)

28.10.1997, Lösungen zu dem Übungsblatt Nr. 2

Aufgabe 1)



Da die Wände glatt sind, können auf das Brett nur Kräfte senkrecht zu den Wänden wirken:

$$\sum F_x = N_2 \cos\alpha - N_1 \sin\alpha = 0, \tag{1}$$

$$\sum F_y = N_2 \sin\alpha + N_1 \cos\alpha - g(m+M) = 0. \tag{2}$$

Dies kann man nun umformen:

$$N_2 = N_1 \tan\alpha\ , \quad \frac{N_1}{\cos\alpha}(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = g(m+M). \tag{3}$$

Damit erhält man die Gleichungen :

$$N_1 = (m+M)g\cos\alpha\ , \quad N_2 = (m+M)g\sin\alpha\ . \tag{4}$$

Die Drehmomente um den Mittelpunkt des Bretts beträgt:

$$\sum D_z = -N_2 \sin\alpha\frac{l}{2} + N_1 \cos\alpha\frac{l}{2} - Mg(x - \frac{l}{2}) = 0, \tag{5}$$

$$(m+M)\frac{gl}{2}(-\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = Mg(x - \frac{l}{2}). \tag{6}$$

Dies führt zu dem Ergebnis:

$$x - \frac{l}{2} = \frac{m+M}{2M} l \cos 2\alpha. \tag{7}$$

Aufgabe 2) Die Formel für das Potential in Kugelkoordinaten lautet:

$$V(r) = -\gamma m \frac{3M}{4\pi R^3} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + \tilde{r}^2 - 2r\tilde{r}\cos\theta}} \tilde{r}^2 \sin\theta \, d\tilde{r} \, d\theta \, d\phi, \tag{8}$$

$$V(r) = -\gamma m \frac{3M}{2R^3} \int_0^R \int_{-1}^1 \frac{\tilde{r}^2}{\sqrt{r^2 + \tilde{r}^2 - 2r\tilde{r}u}} \, d\tilde{r} \, du, \tag{9}$$

$$V(r) = \gamma m \frac{3M}{2R^3} \int_0^R \frac{\tilde{r}}{r} (|r - \tilde{r}| - r - \tilde{r}) \, d\tilde{r}. \tag{10}$$

Für $r > R$ folgt die Lösung:

$$V(r) = -\gamma \frac{mM}{r}. \tag{11}$$

Für $r < R$ folgt die Lösung:

$$V(r) = -\gamma \frac{3mM}{R^3} [\int_0^r \frac{\tilde{r}^2}{r} \, d\tilde{r} + \int_r^R \tilde{r} \, d\tilde{r}] \ , \quad V(r) = -\gamma \frac{mM}{2R^3} (3R^2 - r^2) \ . \tag{12}$$

Aufgabe 3)

a) Die Bewegungsgleichung in Polarkoordinaten lautet:

$$F_r = -\frac{dV}{dr} = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \ , \quad F_\phi = m(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) = 0 \ . \tag{13}$$

Dies formt man um zu :

$$\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} = -\frac{2\dot{r}}{r} \ , \quad \ln \dot{\phi} = -2 \ln r + C \ . \tag{14}$$

Damit lautet $\dot{\phi}(r)$:

$$\dot{\phi}(r) = \frac{A}{r^2}. \tag{15}$$

b) Für eine Kreisbahn gilt: $\dot{r} = 0$, $\omega = \dot{\phi} = \frac{A}{R^2} = const. \Rightarrow A = R^2\omega$.
Mit $\dot{\phi} = \omega \frac{R^2}{r^2}$ erhält man aus (13):

$$-\frac{dV}{dr} = m(\ddot{r} - \omega^2 \frac{R^4}{r^3}). \tag{16}$$

Aus $\ddot{r} = 0$ erhält man :

$$-\frac{dV}{dr}\Big|_R = -m\omega^2 R. \tag{17}$$

c) Benutzt man für den Radius $r = R + \delta$ ergibt sich:

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{dV}{dr}\Big|_R - \delta \frac{d^2V}{dr^2}\Big|_R. \tag{18}$$

Wird dies in (16) eingesetzt folgt unter Beachtung von $\frac{1}{r^3}\Big|_{R+\delta} = \frac{1}{R^3(1+\frac{\delta}{R})^3} = \frac{1}{R^3}(1+3\frac{\delta}{R}) + \ldots$.

$$-\frac{dV}{dr}\Big|_R - \delta\frac{d^2V}{dr^2}\Big|_R = m(\ddot{\delta} - \omega^2 R(1-3\frac{\delta}{R})), \tag{19}$$

$$-\delta(\frac{d^2V}{dr^2}\Big|_R + 3m\omega^2) = m\ddot{\delta}. \tag{20}$$

Damit die Kreisbahn stabil ist, muß $\frac{\ddot{\delta}}{\delta} < 0$ sein:

$$3m\omega^2 R = 3\frac{dV}{dr}\Big|_R > -R\frac{d^2V}{dr^2}\Big|_R \ . \tag{21}$$

d) Für das Potential $V = \frac{U}{r^\alpha}$ ergibt sich

$$\frac{dV}{dr}\Big|_R = -\alpha\frac{U}{R^{\alpha+1}} \ , \quad \frac{d^2V}{dr^2}\Big|_R = \alpha(\alpha+1)\frac{U}{R^{\alpha+2}} \ . \tag{22}$$

Damit eine Kreisbahn möglich ist, muß die Zentralkraft anziehend sein und damit $\alpha U < 0$.

$$-3\alpha U > -(\alpha^2+\alpha)U \ , \quad 3 > \alpha + 1 \ . \tag{23}$$

Damit ergibt sich für $\alpha < 2$ eine stabile Umlaufbahn.