Übungen zur theoretischen Mechanik (Rose/Hoffstätter)

11.11.1997, Lösungen zu dem Übungsblatt Nr. 3

Aufgabe 1)

a) Für die Umlaufdauer eines Körpers auf einer elliptischen Bahn gilt:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M} \ .$$

a ist die Länge der großen Halbachse, M ist die Masse des Zentralkörpers und γ die Gravitationskonstante. Für die Umlaufzeit der Raumstation gilt somit ${T_2}^2 = K{r_2}^3$ und für die Umlaufzeit des Raumschiffs entlang der elliptischen Bahn gilt $T_{1,2}^2 = K(\frac{r_1+r_2}{2})^3$, mit einer Proportionalitätkonstanten K.

Während der Flugzeit $T_{1,2}/2$ des Raumschiffs von der kleinen zur großen Kreisbahn überstreicht die Raumstation den Winkel $\beta = \pi\frac{T_{1,2}}{T_2}$. Der Vorsprung α, den die Raumstation benötigt, berechnet sich zu

$$\alpha = \pi - \beta = \pi(1 - \frac{T_{1,2}}{T_2}) = \pi(1 - (\frac{r_1 + r_2}{2r_2})^{\frac{3}{2}}) \ .$$

b) Für die Gesamtenergie auf einer Ellipsenbahn gilt

$$E_{ges} = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2m\rho^2} - \gamma\frac{mM}{\rho} = \frac{L^2}{2m\rho_{min}^2} - \gamma\frac{mM}{\rho_{min}} \ ,$$

da an dem Punkt mit kleinstem Radius ρ_{min} gerade $\dot{\rho}$ verschwindet. Für die weiteren Umformungen benötigen wir die Keplerbewegung

$$\rho = \frac{A}{1 + \varepsilon cos\varphi} \text{ und } \rho_{min} = \frac{A}{1 + \varepsilon} \ .$$

Außerdem gelten auf der Ellipsenbahn die Beziehungen $A = \frac{a^2-e^2}{a}$ und $\varepsilon = \frac{e}{a}$. ε ist die numerische Exzentrizität, e ist der Abstand vom Brennpunkt zum Mittelpunkt der Ellipse und $A = \frac{L^2}{\gamma M m^2}$. Einsetzen von $\rho_{ex} = A/(1 + \varepsilon)$ und $\frac{L^2}{A} = \gamma M m^2$ ergibt

$$\begin{aligned}
E_{ges} &= \frac{L^2}{2mA^2}(1+\varepsilon)^2 - \gamma\frac{mM}{A}(1+\varepsilon) \\
&= \gamma\frac{mM}{2A}(1+\varepsilon)^2 - \gamma\frac{mM}{A}(1+\varepsilon) \\
&= -\gamma\frac{mM}{2A}(1-\varepsilon^2) = -\gamma\frac{mMa}{2(a^2-e^2)}(\frac{a^2-e^2}{a^2}) = -\gamma\frac{mM}{2a}
\end{aligned}$$

c)

$$\Delta E = E_{1,2} - E_1 = -\gamma mM(\frac{1}{r_1 + r_2} - \frac{1}{2r_1}) = -\gamma mM\frac{r_1 - r_2}{2(r_1 + r_2)}$$

Aufgabe 2) Fliegt ein Teilchen aus der Ruhelage heraus unter konstanter Beschleunigung b eine Strecke s, so ist die Flugzeit $t = \sqrt{2s/b}$. Wenn der Draht mit der horizontalen Ebene einen Winkel α einschließt, dann hat er wegen des Satzes von Thales die Länge $2R\sin\alpha$. Die Beschleunigung entlang des Drahtes ist $g\sin\alpha$. Die Flugzeit ist demnach $t = \sqrt{\frac{4R\sin\alpha}{g\sin\alpha}} = 2\sqrt{\frac{R}{g}}$ und damit unabhängig vom Aufhängepunkt.

Aufgabe 3)

a) Die Rechnung läßt sich am sinnvollsten in kartesischen Koordinaten ausführen:

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$$

Die Kraft $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ führt dann zu

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 x \ , \quad m\ddot{y} = -m\omega^2 y \ .$$

Daher vollziehen x und y harmonische Schwingungen der allgemeinen Form

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & \dot{x}_0/\omega \\ y_0 & \dot{y}_0/\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix} \ .$$

Da geschlossene Kurven in der x–y Ebene gesucht sind, muß t eliminiert werden. Dazu löst man nach den trigonometrischen Funktionen auf. Dabei berücksichtigt man, daß die Inverse einer 2×2 Matrix leicht berechnet werden kann, wenn man die Determinante det der obigen Anfangswertmatrix verwendet,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\dot{y}_0}{\omega} & -\frac{\dot{x}_0}{\omega} \\ -y_0 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \frac{1}{det} \ , \\
(x,y)\begin{pmatrix} \frac{\dot{y}_0}{\omega} & -y_0 \\ -\frac{\dot{x}_0}{\omega} & x_0 \end{pmatrix} &\cdot \begin{pmatrix} \frac{\dot{y}_0}{\omega} & -\frac{\dot{x}_0}{\omega} \\ -y_0 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \frac{1}{det^2} \\
&= (\cos\omega t, \sin\omega t) \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix} = \sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1 \ .
\end{aligned}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung zwischen x und y und beschreibt daher einen Kegelschnitt. Die Kurven können also nur Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln sein. Da es sich um Schwingungsgleichungen handelt, kann keine der Koordinaten x und y unendlich anwachsen und bei den geschlossenen Kurven kann es sich nur um Ellipsen handeln, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt.

b) Befindet sich eine Probemasse m in einer homogenen mit Masse gefüllten Kugel bei Radius r, so wirken nur Kräfte von Teilchen, die sich in der vom Radius r eingeschlossenen Kugel befinden,

$$F = -\frac{mM\gamma}{R_0^3}\frac{r^3}{r^2} = -\frac{mM\gamma}{R_0^3}r \ , \quad -\partial_r V(r) \ .$$

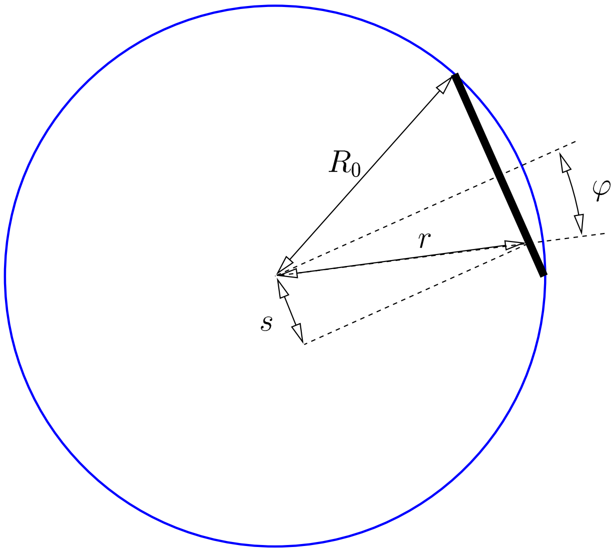
Daraus folgt $V(R) = -\frac{mM\gamma}{2R_0^3}r^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r$ und somit $\omega^2 = \frac{M\gamma}{R_0^3}$.

c) i) Die Bewegung durch den Tunnel nach Neuseeland ist eine Schwingung $r(t) = \cos \omega t$ mit der Reisezeit $\tau = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$.

ii) Aus der Abbildung ergibt sich $s = sin\varphi R$. Die Kraft entlang des Tunnels ist $m\omega^2 r \sin\varphi$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= -m\omega^2 \frac{s}{sin\varphi} sin\varphi \\ &= -m\omega^2 s \end{aligned}$$

Die Reisezeit beträgt eine halbe Schwingungsperiode dieser Schwingungsgleichung, $\tau = \frac{\pi}{\omega}$.



iii) Die überlagerung einer Cosinus Schwingung in y–Richtung mit einer Sinus Schwingung in x–Richtung ergibt eine Kreisbahn im Potential der homogenen Kugel. Die halbe Schwingungsperiode $\frac{\pi}{\omega}$ dieser Schwingungen ist wieder die Reisezeit.