Übungen zur theoretischen Mechanik (Rose/Hoffstätter)

18.11.1997, Lösungen zu dem Übungsblatt Nr. 4

Das d'Alembertsche Prinzip lautet

$$\delta A = (\vec{F} - m\ddot{\vec{r}})\,\delta\vec{r} = 0\,. \tag{1}$$

Aufgabe 1)

a) Die Gesamtlänge des Fadens ist konstant $\rightarrow$ Die Zwangsbedingung lautet

$$R\phi + l = l_{ges} \rightarrow \dot{l} = -R\dot{\phi}\,. \tag{2}$$

$$\vec{F} = -mg\,\vec{e}_y\,, m\ddot{\vec{r}} = m\,(\ddot{x}\,\vec{e}_x + \ddot{y}\,\vec{e}_y)\,, \delta\vec{r} = \delta x\,\vec{e}_x + \delta y\,\vec{e}_y \tag{3}$$

(3) wird in (1) eingesetzt

$$\ddot{x}\,\delta x + (g + \ddot{y})\,\delta y = 0\,. \tag{4}$$

Die Lage des Massenpunktes wird beschrieben durch

$$x = R\sin\phi + l\cos\phi \tag{5}$$

$$y = R\cos\phi - l\sin\phi\,. \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= R\dot{\phi}\cos\phi + \underbrace{\dot{l}}_{-R\dot{\phi}}\cos\phi - l\dot{\phi}\sin\phi = -l\dot{\phi}\sin\phi\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \rightarrow \delta x = -l\,\delta\phi\sin\phi \qquad (7)\\ \dot{y} &= -R\dot{\phi}\sin\phi - \underbrace{\dot{l}}_{-R\dot{\phi}}\sin\phi - l\dot{\phi}\cos\phi = -l\dot{\phi}\cos\phi\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \rightarrow \delta y = -l\,\delta\phi\cos\phi \qquad (8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -l\ddot{\phi}\sin\phi - \dot{l}\dot{\phi}\sin\phi - l\dot{\phi}^2\cos\phi\\ \ddot{y} &= -l\ddot{\phi}\cos\phi - \dot{l}\dot{\phi}\cos\phi + l\dot{\phi}^2\sin\phi \qquad (9)\end{aligned}$$

(7), (8), (9) eingesetzt in (4) ergibt die Bewegungsgleichung

$$\boxed{(l_{ges} - R\phi)\ddot{\phi} - R\,\dot{\phi}^2 - g\cos\phi = 0}\,. \tag{10}$$

b) Die Bedingungen für das Gleichgewicht ergeben sich aus der Forderung, daß die Geschwindigkeit und die Beschleunigung Null sind. Aus der Bewegungsgleichung folgt dann

$$g\cos\phi = 0 \rightarrow \boxed{\phi = \frac{\pi}{2} \vee \phi = \frac{3\pi}{2}}\,. \tag{11}$$

c) Entwickelt man ϕ um $\frac{\pi}{2}$, so erhält man mit

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \epsilon \, , \dot{\phi} = \dot{\epsilon} \, , \ddot{\phi} = \ddot{\epsilon} \, . \tag{12}$$

für den $\cos\phi$

$$\cos\phi = \cos(\frac{\pi}{2} + \epsilon) = -\sin\epsilon \simeq -\epsilon \, . \tag{13}$$

Vernachlässigung der 2. und höheren Ordnungen ergibt

$$(l_{ges} - \frac{\pi}{2}R)\,\ddot{\epsilon} + g\,\epsilon = 0 \, . \tag{14}$$

Die Lösung entspricht der Gleichung des harmonischen Oszillators, da $l_{ges} > \frac{\pi R}{2}$.

$$\boxed{\epsilon(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \text{ mit } \omega^2 = \frac{g}{l_{ges} - \frac{\pi R}{2}}} \, . \tag{15}$$

Linearisiert man um $\frac{3\pi}{2}$, so erhält man

$$(l_{ges} - \frac{\pi}{2}R)\,\ddot{\epsilon} - g\,\epsilon = 0 \, . \tag{16}$$

Das Gleichgewicht ist also instabil, und die Integration der Bewegungsgleichungen ergibt

$$\boxed{\epsilon(t) = A\cosh(\omega t) + B\sinh(\omega t) \text{ mit } \omega^2 = \frac{g}{l_{ges} - \frac{\pi R}{2}}} \, . \tag{17}$$

Aufgabe 2) x sei die Koordinate der Rollenachse, gemessen vom Startpunkt aus. y sei die Koordinate der Masse m, gemessen von der Umlenkrolle in $\vec{g}$-Richtung mit $y(t=0) = l_0$. Die Kraft ist dann $\vec{F} = mg\vec{e}_y$.

$$x = R\,\phi \to \dot{x} = R\,\dot{\phi} \to \delta x = R\,\delta\phi \tag{18}$$

$$y = R\,\phi + x + l_0 \to \dot{y} = R\,\dot{\phi} + \dot{x} = 2\dot{x} \to \delta y = 2R\,\delta\phi = 2\,\delta x \tag{19}$$

Obige Gleichungen in (1) eingesetzt ergibt

$$-M\,\ddot{x}\,\delta x - m(-g + \ddot{y})\,\delta y = 0 \, . \tag{20}$$

Somit lauten die Bewegungsgleichungen

$$(4m + M)\,\ddot{y} - 4mg = 0 \, . \tag{21}$$

und die Bewegung des Systems erfolgt nach

$$\boxed{y(t) = \frac{g}{1 + \frac{M}{4m}}\,t^2 + l_0} \, . \tag{22}$$