Aufgabe 1) Die Zwangskraft $\vec{N} = mg\cos\alpha\vec{e}_y$ hält die Masse m auf der schiefen Ebene. Die zugehörige Reibungskraft $\vec{R} = \pm\mu|\vec{N}|\vec{e}_x$ hemmt die Bewegung der Masse. Für $t < t_1$ gilt:

$$m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha, \tag{1}$$

also

$$x = v_0 t - \frac{B}{2}t^2 \text{ mit } \; B = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) > 0 \;, \tag{2}$$

$$\dot{x} = v_0 - Bt \;. \tag{3}$$

Zum Zeitpunkt t_1 kommt m zur Ruhe :

$$0 = v_0 - Bt_1 \;, \quad t_1 = \frac{v_0}{B} = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} \;, \tag{4}$$

$$x_1 = x(t_1) = \frac{v_0^2}{B} - \frac{Bv_0^2}{2B^2} = \frac{v_0^2}{2B} \;. \tag{5}$$

Beim Zurückrutschen dreht sich das Vorzeichen von $\vec{R}$ um :

$$\ddot{x} = -g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha = -\bar{B} \;, \quad \bar{B} > 0 \;. \tag{6}$$

Jetzt gilt $x = x_1 - \frac{\bar{B}}{2}(t - t_1)^2$ daraus ergibt sich mit $x(t_2) = 0$:

$$0 = x_1 - \frac{\bar{B}}{2}(t_2 - t_1)^2 \;, \quad (t_2 - t_1)^2 = \frac{2x_1}{\bar{B}} = \frac{v_0^2}{B\bar{B}} \;, \tag{7}$$

$$t_2 = \frac{v_0}{\sqrt{B\bar{B}}} + \frac{v_0}{B} = \frac{v_0}{B}\left(\sqrt{\frac{B}{\bar{B}}} + 1\right) \;, \tag{8}$$

$$t_2 = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}\left(1 + \sqrt{\frac{\tan\alpha + \mu}{\tan\alpha - \mu}}\right) \;. \tag{9}$$

Aufgabe 2) Die Bewegungsgleichung für m lautet:

$$N_z - mg = 0 \;, \tag{10}$$

$$N_\rho = -m\rho\dot{\varphi}^2 \;, \tag{11}$$

$$-R = m\rho\ddot{\varphi} \;. \tag{12}$$

Die Reibungskraft R ergibt sich zu:

$$R = \mu|\vec{N}| = \mu\sqrt{N_Z^2 + N_\rho^2} = \mu m\sqrt{g^2 + \rho^2\dot{\varphi}^4} \;, \tag{13}$$

$$\rho\ddot{\varphi} = -\mu\sqrt{g^2 + \rho^2\dot{\varphi}^4} \;, \tag{14}$$

$$\rho\dot{\varphi}d\dot{\varphi} = \frac{\rho}{2}d\dot{\varphi}^2 = -\mu\sqrt{g^2 + \rho^2(\dot{\varphi}^2)^2}d\varphi \ . \tag{15}$$

Wir setzen $\omega = \rho\dot{\varphi}^2$:

$$\frac{d\omega}{2\sqrt{g^2+\omega^2}} = -\mu d\varphi \ , \tag{16}$$

$$\mathrm{arsh}(\frac{\omega}{g}) - \mathrm{arsh}(\frac{\omega_0}{g}) = -2\mu\varphi \ . \tag{17}$$

Die Energie der Perle lautet:

$$E = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}\rho^2\dot{\varphi}^2 = \frac{m\rho}{2}\omega \ , \tag{18}$$

$$\mathrm{arsh}(\frac{2E}{m\rho g}) - \mathrm{arsh}(\frac{2E_0}{m\rho g}) = -2\mu\varphi \ . \tag{19}$$

Nach einem Umlauf beträgt E :

$$E_{2\pi} = \frac{m\rho g}{2}\sinh(\mathrm{arsh}(\frac{2E_0}{m\rho g}) - 4\pi\mu) \ . \tag{20}$$

Damit überhaupt ein Umlauf vollendet wird, muß $E_{2\pi} \geq 0$ sein:

$$\mathrm{arsh}(\frac{2E_0}{m\rho g}) \geq 4\pi\mu \ , \tag{21}$$

$$\frac{2E_0}{m} = v_0^2 \geq \rho g\sinh(4\pi\mu) \ . \tag{22}$$