Übungen zur theoretischen Mechanik (Rose/Hoffstätter)

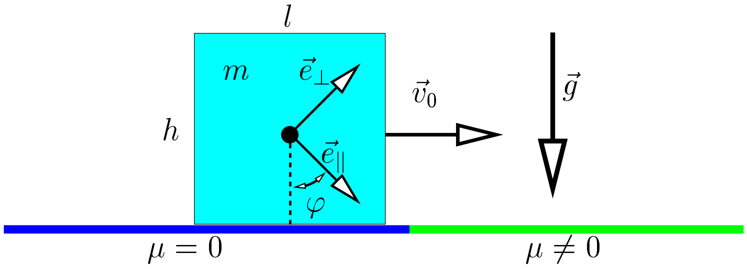
2.12.1997, Lösungen zu dem Übungsblatt Nr. 6

Aufgabe 1) Im Schwerpunkt S des Quaders greift die parallel zur Bewegungsrichtung wirkende Trägheitskraft $-m\ddot{x}$ und die Schwerkraft $-mg$ an. Die Verbindungslinie L zwischen S und der vorderen Kante des Quaders schließt mit der Senkrechten den Winkel φ ein. Wir zerlegen die Gesamtkraft in einen Anteil parallel und senkrecht zu L:

$$F_\perp = (-mg\sin\varphi - m\ddot{x}\cos\varphi)\vec{e}_\perp \ , \quad F_\| = (mg\cos\varphi - m\ddot{x}\ sin\varphi)\vec{e}_\| \ .$$

Der Quader darf sich nicht überschlagen: Das Moment der Schwerkraft muß größer sein als das durch die Trägheitskraft ausgeübte.

$$\vec{F}_\perp \times \vec{e}_\perp \leq 0, \qquad -\ddot{x} \leq g\tan\varphi \ .$$



Die Reibungskraft verzögert die Bewegung, $-m\ddot{x} = mg\mu$. Weil der Quader eine maximal verzögerte Bewegung durchführen soll und dabei mit der gesamten Lange aufliegt, gilt für den Winkel φ mit

$$\tan\varphi = \frac{l}{h} \ , \quad \Rightarrow \mu = tan\varphi \Rightarrow \mu = \frac{l}{h} \ .$$

Mit dem für μ bestimmten Wert berechnen wir mit den Bewegungsgleichungen den Energieverlust bis zum Stillstand. Der Energieverlust muß der gesamten kinetischen Energie entsprechen.

$$\dot{x}(t_{stop}) = v_0 - gt_{stop}\mu = 0 \Rightarrow t_{stop} = \frac{v_0}{gtan\varphi} \ .$$

$$x = v_0 t_{stop} - \frac{1}{2}g{t_{stop}}^2\mu \ , \quad x = \frac{{v_0}^2}{2g\mu} = \frac{{v_0}^2 h}{2gl} \ .$$

Der Energieverlust durch Reibung, ΔE berechnet sich zu

$$\Delta E = x \cdot mg\mu = \frac{{v_0}^2 h}{2gl} \cdot \frac{l}{h}mg \ , \quad \Delta E = \frac{1}{2}m{v_0}^2 \ .$$

Das war gerade die gesamte kinetische Energie des Körpers.

Aufgabe 2) Die zu berechnenden Integrale für den Trägheitstensor sind von der Form

$$\Theta_{ij} = \int\limits_{\text{Kugel}} \varrho(r^2\delta_{ij} - x_i x_j) d^3r \ .$$

Da die Integration über die Kugel läuft, sind die Integrationsgrenzen in x, y und z jeweils symmetrisch. Damit verschwinden alle Anteile mit ungeraden Potenzen in x, y oder z. Wir berechnen zuerst den Anteil der homogenen Kugel mit der Dichte ϱ_0.

$$\begin{aligned}
\text{für } i \neq j: \ \Theta_{ij}^{\text{Kugel}} &= -\int \varrho_0 x_i x_j d^3r = 0 \qquad \text{(ungeradePotenzen)} \ , \\
\text{für } i = j: \ \Theta_{ij}^{\text{Kugel}} &= \int \varrho_0 (r^2 - {x_i}^2) d^3r \ , \\
\text{also z.B. } \Theta_{33}^{\text{Kugel}} &= \int \varrho_0 (x^2 + y^2) d^3r = 2\pi\varrho_0 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{R} r^2 sin^2\vartheta r^2 dr sin\vartheta d\theta \\
&= [-cos\vartheta + \frac{cos^3\vartheta}{3}]_0^{pi} \cdot [\frac{r^5}{5}]_0^R \cdot 2\pi\varrho_0 = \frac{8\pi}{15}\varrho_0 R^5 \ .
\end{aligned}$$

Setzen wir noch $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho_0$ ein, so ergibt sich $\Theta_{33}^{\text{Kugel}} = \frac{2}{5} m R^2 = \Theta_0$. Für den zweiten Anteil der Dichte ($\varrho_1 \frac{xz}{R^2}$) finden wir

$$\Theta_{ii}^{(2)} = \frac{\varrho_1}{R^2} \int xz(r^2 - {x_i}^2) d^3r = 0 \ .$$

Der Integrand ist in jedem Fall unsymmetrisch. Für $i \neq j$ gilt

$$\Theta_{ii}^{(2)} = \frac{-\varrho_1}{R^2} \int xz x_i x_j d^3r \ .$$

Hier ergibt sich nur für $\Theta_{13}^{(2)}$ ein symmetrischer Integrand. $\Theta_{12}^{(2)}$ und $\Theta_{23}^{(2)}$ verschwinden.

$$\Theta_{13}^{(2)} = -\frac{\varrho_1}{R^2} \int x^2 z^2 d^3r = -\frac{\varrho_1}{R^2} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \sin^2\vartheta \cos^2\varphi \cos^2\vartheta r^2 \sin\vartheta d\varphi d\vartheta dr \ ,$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi &= \frac{1}{2}(\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi + \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi) = \int\limits_0^{2\pi} 1\varphi d\varphi = \pi \ , \\
\int\limits_0^{\pi} \sin^3\vartheta \cos^2\vartheta d\vartheta &= \int_{-1}^{1} \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta d(\cos\vartheta) = \int\limits_{-1}^{1} (1 - x^2) x^2 dx = [\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}]_{-1}^{1} = \frac{4}{15} \ , \\
\int\limits_0^R r^6 dr &= \frac{R^7}{7} \ , \quad \Rightarrow \Theta_{13}^{(2)} = -\varrho_1 \pi \frac{4}{105} R^5 = -\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\frac{m}{35} R^2 = -\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\frac{\Theta_0}{14} \ .
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Trägheitstensor $(\Theta_{ij}) = \Theta_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\varrho_1}{14\varrho_0} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\varrho_1}{14\varrho_0} & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3) Wir wollen annehmen, daß sich der Hammer zum Zeitpunkt des Auftreffens auf den Nagel ohne zu rotieren nach unten bewegt. Wir berechnen den Vorgang im mit dem Hammer mitbewegten System, so daß er vor dem Schlag in Ruhe ist. Dann erhält der Hammer einen Kraftstoß

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{\infty} F_0(t) dt \ ,$$

sodaß er nach dem Auftreffen den Schwerpunktimpuls Δp und den Drehimpuls $L = F_0 a$ erhält. Nun suchen wir den Punkt x, der seinen Bewegungszustand im Moment des Schlages nicht ändert, der also auch nach dem Schlag im betrachteten System in Ruhe bleibt,

$$0 = v(x) = \frac{\Delta p}{m} - \omega(x-a) = \frac{\Delta p}{m} - \frac{L}{\Theta}(x-a) \ .$$

Θ ist durch den Trägheitsradius I gegeben, $\Theta = mI^2$. Damit ergibt sich $x = \frac{I^2}{a} + a = \frac{I^2+a^2}{a}$.

Ergänzung: I ist definiert durch

$$I^2 = \frac{\int (\xi - x_s)^2 dm}{m} = \frac{\int (\xi - a)^2 dm}{m} \ ,$$

wobei a die Schwerpunktskoordinate x_s ist, $ma = \int \xi dm$. Damit ergibt sich

$$x = \frac{\int \xi^2 dm - 2a \int \xi dm + a^2 \int dm + a^2 m}{ma} = \frac{\int \xi^2 dm}{\int \xi dm} \ .$$

Wählen wir den Hammer durch eine große, punktförmige Masse M bei $\xi = 0$ und einen homogenen Stab mit Dichte ϱ und Länge l, so wird x unabhängig von M,

$$x = \frac{\varrho_0 \int_0^l \xi^2 d\xi}{\varrho_0 \int_0^l \xi d\xi} = \frac{2}{3} l \ .$$