Übungen zur theoretischen Mechanik (Rose/Hoffstätter)

9.12.1997, Lösungen zu dem Übungsblatt Nr. 7

Aufgabe 1) Die Euler-Gleichungen lauten im kräftefreien Fall

$$\theta_\xi \dot{\omega_\xi} + (\theta_\zeta - \theta_\eta)\omega_\zeta \omega_\eta = 0\,, \tag{1}$$
$$\theta_\eta \dot{\omega_\eta} + (\theta_\xi - \theta_\zeta)\omega_\xi \omega_\zeta = 0\,, \tag{2}$$
$$\theta_\zeta \dot{\omega_\zeta} + (\theta_\eta - \theta_\xi)\omega_\xi \omega_\eta = 0 \tag{3}$$

Der Kreisel rotiere um die ζ-Achse, wobei kleine Abweichungen ϵ_i in der Winkelgeschwindigkeit auftreten. Den Ansatz

$$\omega_\zeta = \omega_0 + \epsilon_\zeta\,, \omega_\xi = \epsilon_\xi\,, \omega_\eta = \epsilon_\eta \tag{4}$$

setzt man in die Euler-Gleichungen ein, wobei die Größen ϵ_i klein gegen ω_0 sind. Linearisiert man die Euler-Gleichungen in den kleinen Größen ϵ_i, erhält man

$$\theta_\xi \dot{\epsilon_\xi} + (\theta_\zeta - \theta_\eta)\omega_0 \epsilon_\eta = 0\,, \tag{5}$$
$$\theta_\eta \dot{\epsilon_\eta} + (\theta_\xi - \theta_\zeta)\omega_0 \epsilon_\xi = 0\,, \tag{6}$$
$$\theta_\zeta \dot{\epsilon_\zeta} = 0 \to \epsilon_\zeta = \epsilon_\zeta(0)\,. \tag{7}$$

Aus den beiden übrigen Gleichungen folgt durch Substitution der ersten in die Ableitung der zweiten Gleichung und umgekehrt

$$\ddot{\epsilon_\eta} + \frac{(\theta_\xi - \theta_\zeta)(\theta_\eta - \theta_\zeta)}{\theta_\eta \theta_\xi}\omega_0{}^2 \epsilon_\eta = 0\,, \tag{8}$$
$$\ddot{\epsilon_\xi} + \frac{(\theta_\xi - \theta_\zeta)(\theta_\eta - \theta_\zeta)}{\theta_\eta \theta_\xi}\omega_0{}^2 \epsilon_\xi = 0\,. \tag{9}$$

Dies sind zwei Schwingungsgleichungen mit der Frequenz Ω,

$$\Omega^2 = \frac{(\theta_\xi - \theta_\zeta)(\theta_\eta - \theta_\zeta)}{\theta_\eta \theta_\xi}\omega_0{}^2\,. \tag{10}$$

1. Falls $\theta_\xi, \theta_\eta > \theta_\zeta$ oder $\theta_\xi, \theta_\eta < \theta_\zeta$ ist, dann ist Ω reell, und deshalb wird die Bewegung durch eine Linearkombination von $\sin\sqrt{\frac{(\theta_\xi - \theta_\zeta)(\theta_\eta - \theta_\zeta)}{\theta_\eta \theta_\xi}}$ und $\cos\sqrt{\frac{(\theta_\xi - \theta_\zeta)(\theta_\eta - \theta_\zeta)}{\theta_\eta \theta_\xi}}$ beschrieben : Die Bewegung ist stabil.
2. Falls $\theta_\xi < \theta_\zeta < \theta_\eta$ oder $\theta_\eta < \theta_\zeta < \theta_\xi$ ist, dann ist Ω imaginär, und die Bewegung wird durch eine Linearkombination von $\sinh\sqrt{\frac{(\theta_\xi - \theta_\zeta)(\theta_\eta - \theta_\zeta)}{\theta_\eta \theta_\xi}}$ und $\cosh\sqrt{\frac{(\theta_\xi - \theta_\zeta)(\theta_\eta - \theta_\zeta)}{\theta_\eta \theta_\xi}}$ beschrieben : Die Bewegung ist instabil.
   Somit ist die Bewegung um die Achse mit dem größten und dem kleinsten Trägheitsmoment stabil.

3. Falls $\theta_\xi = \theta_\zeta$ oder $\theta_\eta = \theta_\zeta$ ist, dann ist die Bewegung instabil. Denn es folgt z.B. für $\theta_\xi = \theta_\zeta$ aus (6)

$$\theta_\eta \dot{\epsilon_\eta} = 0 \to \epsilon_\eta = \epsilon_\eta(0)\,, \tag{11}$$

das in (5) eingesetzt wird. Damit lautet ϵ_ξ

$$\epsilon_\xi = \frac{\theta_\eta - \theta_\zeta}{\theta_\zeta}\,\omega_0\,\epsilon_\eta(0)\,t + \epsilon_\xi(0)\,. \tag{12}$$

Gleiches gilt auch für den Fall $\theta_\eta = \theta_\zeta$, wie man bei der Vertauschung der Indizes η und ξ leicht sieht.

Aufgabe 2) Die Schubkraft nach Zünden des Treibsatzes wirkt entgegengesetzt zum Gasausstoß.

$$\vec{F}(\phi) = F_0(\cos\phi\,\vec{e}_x + \sin\phi\,\vec{e}_y) \tag{13}$$

Das Trägheitsmoment des Ringes beträgt $\theta = md^2 \;\to$ Der Drehimpuls schreibt sich als $L = md^2\dot{\phi}$ und das Drehmoment als $M = dF_0$ .Aus dem Drehimpulssatz ergibt sich für den Winkel ϕ die Bewegungsgleichung $\ddot{\phi} = \frac{F_0}{mR}$. Mit $\phi(t=0) = 0$ und $\dot{\phi}(t=0) = 0$ folgt $\phi(t) = \frac{1}{2}\frac{F_0}{md}t^2 = \frac{t^2}{\tau^2}$, wobei $\tau^2 = \frac{2md}{F_0}$. ist. ϕ wird in die Newtonschen Bewegungsgleichungen für den Schwerpunkt, die $m\ddot{x} = F_0\cos\phi$ und $m\ddot{y} = F_0\sin\phi$ lauten, eingesetzt, und wir erhalten nach der Integration $\dot{x} = \frac{F_0}{m}\int_0^t \cos(\frac{t'^2}{\tau^2})\,dt'$ und $\dot{y} = \frac{F_0}{m}\int_0^t \sin(\frac{t'^2}{\tau^2})\,dt'$.

a) Entwickelt man die Integranden, $\cos\frac{t'^2}{\tau^2} = 1 - \frac{1}{2}\frac{t'^4}{\tau^4}$ und $\sin\frac{t'^2}{\tau^2} = \frac{t'^2}{\tau^2}$, und integriert bis zur kleinsten vorkommenden Ordnung in t, ergibt sich für die Geschwindigkeit des Schwerpunktes

$$\dot{x} = \frac{F_0}{m}t\,,\dot{y} = \frac{1}{6}\frac{F_0^2}{m^2d}t^3 \tag{14}$$

b) Zur Berechnung des Integrals für $t \to \infty$ geht man in die komplexe Ebene und erhält das Fresnelintegral (siehe Präsenzübung Nr. 7 !),

$$\dot{x} + \mathrm{i}\dot{y} = \frac{F_0}{m}\lim_{t\to\infty}\int_0^t \exp(\mathrm{i}\,\frac{t'^2}{\tau^2})\,dt' = \tau\frac{F_0}{m}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\lim_{\tilde{t}\to\infty}F(\tilde{t}) \tag{15}$$

mit $F(\tilde{t})$ als Fresnelintegral. Nach Präsenzübung Nr. 7 gilt $\lim_{\tilde{t}\to\infty}F(\tilde{t}) = \frac{1}{2}(1+\mathrm{i})$, womit die Schwerpunktsgeschwindigkeit für große Zeiten lautet

$$\dot{\vec{x}}(\infty) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi d\,F_0}{m}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y) \tag{16}$$

Das Sonnenrad wird also für kleine Zeiten vor allem in x - Richtung beschleunigt. Dann erfährt das Rad eine zusätzliche, merkliche Geschwindigkeitszunamhme in y-Richtung und oszilliert anschließend mit abnehmender Amplitude um die konstante Endgeschwindigkeit $\dot{\vec{x}}(\infty)$.