**Aufgabe 1)**

a) Aus den Zwangsbedingungen folgt:

$$\begin{aligned} g_1(X,Y,x,y) &= x^2+(y-Y)^2-R^2=0 \ , && (1)\\ g_2(X,Y,x,y) &= X=0 \ . && (2) \end{aligned}$$

Setzt man nun die Zwangsbedingungen unter Berücksichtigung der Feder und Schwerkraft in die Lagrangegleichung erster Art ein, erhält man:

$$m\begin{pmatrix} \ddot{Y} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg-k(Y-Y_0) \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} \partial_Y g_1 \\ \partial_x g_1 \\ \partial_y g_1 \end{pmatrix} \ , \tag{3}$$

$$\begin{aligned} m\ddot{Y} &= gm-k(Y-Y_0)-2\lambda_1(y-Y) \ , && (4)\\ m\ddot{x} &= 2\lambda_1 x \ , && (5)\\ m\ddot{y} &= gm+2\lambda_1(y-Y) \ . && (6) \end{aligned}$$

Drückt man nun $x, y$ in Abhängigkeit von $\phi$ aus:

$$x = R\sin\phi \ , \quad y = Y + R\cos\phi \ , \tag{7}$$

so ist die Zwangsbedingung $g_1 = 0$ immer erfüllt. Die Lagrangegleichungen erster Art (4-6) sind ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und den drei Unbekannten $\ddot{Y}$, $\ddot{\phi}$ und $\lambda_1$. Diese ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \ddot{Y} &= \frac{3gm-2k(Y-Y_0)+gm\cos 2\phi+2mR\cos(\phi)\dot{\phi}^2}{m(3+\cos 2\phi)} \ , && (8)\\ \ddot{\phi} &= \frac{2\sin\phi(k(Y_0-Y)+mR\cos\phi\dot{\phi}^2)}{mR(3+\cos 2\phi)} \ , && (9)\\ \lambda_1 &= \frac{k(Y_0-Y)\cos\phi-mR\dot{\phi}^2}{R(3+\cos 2\phi)} \ . && (10) \end{aligned}$$

b) Die kinetische und potentielle Energie des System in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten $\phi$ und $Y$ beträgt:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{Y}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{Y}^2 - 2R\dot{Y}\sin\phi\dot{\phi} + R^2\dot{\phi}^2) \ , \tag{11}$$

$$V = -mgY + \frac{k}{2}(Y-Y_0)^2 - gm(R\cos\phi + Y) \ . \tag{12}$$

Mit Hilfe der Lagrangegleichungen zweiter Art:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial\phi} \ , \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{Y}} - \frac{\partial L}{\partial Y} \ , \quad mit L = T - V \ . \tag{13}$$

Erhält man die Differentialgleichungen:

$$\ddot{Y} = \frac{3gm - 2k(Y - Y_0) + gm\cos 2\phi + 2mR\cos\phi\dot{\phi}^2}{m(3 + \cos 2\phi)} \,, \tag{14}$$

$$\ddot{\phi} = \frac{2\sin\phi(k(Y_0 - Y) + mR\cos\phi\dot{\phi}^2)}{mR(3 + \cos 2\phi)} \,. \tag{15}$$

Diese Gleichungen sind identisch mit den Bewegungsgleichungen (4) und (5) in Teilaufgabe a).

Durch Einsetzen von $\dot{\phi} = 0$, $\ddot{\phi} = 0$ und $\ddot{Y} = 0$ folgt aus Gleichung (15), daß entweder $Y = Y_0$ oder $\sin(\phi) = 0$. Gleichung (14) hat für $Y = Y_0$ keine Lösung mit $\ddot{Y} = 0$ und $\dot{\phi} = 0$. Es gibt demnach zwei Ruhelagen

$$Y = Y_0 + \frac{2mg}{k} \quad , \quad \phi = 0 \quad \text{oder} \tag{16}$$

$$Y = Y_0 + \frac{2mg}{k} \quad , \quad \phi = \pi \,. \tag{17}$$