Übungen zur theoretischen Mechanik (Rose/Hoffstätter)

2.12.1997, Lösungen zu dem Übungsblatt Nr. 9

Aufgabe 1)

$$T = \frac{mr^2}{2}\omega^2 + \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}\dot{z}^2$$

Die kinetische Energie setzt sich zusammen aus den folgenden Anteilen:

$\frac{mr^2}{2}\omega^2$	Rotation
$\frac{m}{2}\dot{r}^2$	horizontale Bewegung
$\frac{m}{2}\dot{z}^2$	vertikale Bewegung

Mit der potentiellen Energie $V = m \cdot g \cdot z$ folgt:

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\omega^2 r^2 + \dot{r}^2 + \dot{z}^2 - 2gz).$$

Mit $z = z(r)$ und $z' = \frac{dz}{dr}$ folgt:

$$L = \frac{m}{2}(\omega^2 r^2 + \dot{r}^2 + {z'}^2\dot{r}^2 - 2gz) \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}(1 + {z'}^2)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\Big) &= m\ddot{r}(1 + {z'}^2) + m\dot{r} \cdot 2z'\frac{d}{dt}(z') \\
&= m\ddot{r}(1 + {z'}^2) + m\dot{r} \cdot 2z'\frac{dr}{dt}\frac{dz'}{dr} \\
&= m(\ddot{r}(1 + {z'}^2) + 2z'z''\dot{r}^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial r} &= m\omega^2 r + \frac{m}{2}\dot{r}^2\frac{\partial}{\partial r}(z')^2 - mgz' \\
&= m\omega^2 r + \frac{m}{2}\dot{r}^2 2z'z'' - mgz' \\
&= m(\omega^2 r + z'z''\dot{r}^2 - gz')
\end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichung lautet demnach:

$$\ddot{r}(1+{z'}^2)+z'z''\dot{r}^2-\omega^2 r+gz'=0$$

In einem stationären Punkt gilt $\dot{r}=0$ und $\ddot{r}=0$. Damit dies für alle Punkte erfüllt ist, muß gelten

$$z'=\frac{\omega^2}{g}r \Rightarrow z=\frac{\omega^2}{2g}r^2$$

Alternative Lösungsmethode : Tangentialer Teil der Gewichtskraft muß gleich dem tangentialen Anteil der Zentrifugalkraft sein, sodaß die Gesamtkraft entlang der Bahn gleich 0 ist.

$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= \frac{dz}{dr}=z' \\
F_{g_t} &= -mg\sin\alpha \\
F_{\text{flieh}_t} &= m\omega^2 r\cos\alpha
\end{aligned}$$

Gleichgewichtslage:

$$\begin{aligned}
-mg\sin\alpha+m\omega^2 r\cos\alpha &= 0 \\
\text{Daraus folgt } \frac{dz}{dr}=\tan\alpha &= \frac{\omega^2 r}{g} \\
\text{Daraus folgt } z &= \int\limits_0^r \frac{\omega^2\tilde{r}}{g}d\tilde{r}\text{Daraus folgt } z=\frac{\omega^2 r^2}{2g}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2a) Die kinetische Energie ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
T &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)=\frac{m}{2}\dot{\phi}^2\left(\frac{h^2}{4\pi^2}+r^2\cos^2\phi+r^2\sin^2\phi\right) \\
V &= mgz=-mgr\cos\phi \\
L &= \frac{m}{2}\left(\dot{\phi}^2\left(\frac{h^2}{4\pi^2}+r^2\right)+2gr\cos\phi\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}=m\dot{\phi}\left(\frac{h^2}{4\pi^2}+r^2\right)\quad\text{und}\quad\frac{\partial L}{\partial\phi}=-mgr\sin\phi$$

Die Bewegungsgleichung lautet daher

$$\ddot{\phi}\left(\frac{h^2}{4\pi^2}+r^2\right)+gr\sin\phi=0$$

Aufgabe 2b) Durch Linearisierung in ϕ ($\sin\phi \approx \phi$) erhält man

$$\phi=\phi_0\cos(\omega t)+\frac{\dot{\phi}_0}{\omega}\sin\omega t \quad \text{mit} \quad \omega^2=\frac{gr}{\frac{h^2}{4\pi^2}+r^2}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\sqrt{\frac{h^2+r^2 4\pi^2}{gr}}$$