Übungen zur theoretischen Mechanik (Rose/Hoffstätter)

30/31.10.1997, Präsenzübung Nr. 1

Aufgabe 1) {*Geeignet für Mathematica Funktion* **Series**$[f, x, x_0, n]$}
Führen Sie die Multipolentwicklung des Gravitationspotentials eines Körpers der Masse M mit der Dichte $\rho(\vec{r})$ auf eine Punktmasse m bis zur 4. Ordnung in $(\frac{r}{R})^2$ durch. Der Ursprung sei der Schwerpunkt $\frac{1}{M}\int \vec{r}\rho(\vec{r})dV$ des Körpers und Beobachtungspunkt $\vec{R}$ liege weit außerhalb des Körpers ($R \ll r$).

Schreiben Sie dazu das Potential als

$$\begin{aligned} V(\vec{R}) &= -\Gamma m M \int \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{R}-\vec{r}|}dV \approx -\frac{\Gamma m M}{R}(1 + \frac{1}{R^4}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} R_i R_j Q_{ij} \\ &+ \frac{1}{R^6}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} R_i R_j R_k S_{ijk} + \frac{1}{R^8}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} R_i R_j R_k R_l O_{ijkl}) \end{aligned}$$

und leiten Sie her, daß die Konstanten Q_{ij}, S_{ijk} und O_{ijkl} folgendermaßen zu berechnen sind:

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= \frac{1}{2M}\int \rho(\vec{r})(3r_i r_j - r^2\delta_{ij})dV \ , \\ S_{ijk} &= \frac{1}{2M}\int \rho(\vec{r})(5r_i r_j - 3r^2\delta_{ij})r_k dV \ , \\ O_{ijkl} &= \frac{1}{8M}\int \rho(\vec{r})(35 r_i r_k r_j r_l - 30 r_i r_j r^2 \delta_{kl} + 3r^4\delta_{ij}\delta_{kl})dV \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 2) Leiten Sie die folgenden Beziehungen her, indem Sie $\cos\phi = \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi})$ und $\sin\phi = \frac{1}{2i}(e^{i\phi} - e^{-i\phi})$ verwenden.

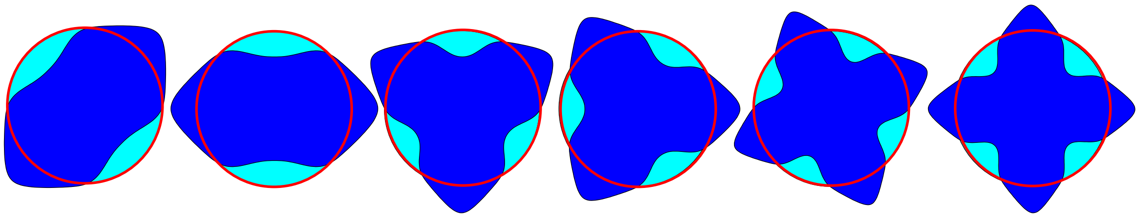
$$\begin{aligned} \cos^2\phi &= \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\phi) \quad , & \cos\phi\sin\phi &= \tfrac{1}{2}\sin 2\phi \\ \sin^2\phi &= \tfrac{1}{2}(1-\cos 2\phi) \quad , & \cos^3\phi &= \tfrac{1}{4}(3\cos\phi + \cos 3\phi) \\ \cos^2\phi\sin\phi &= \tfrac{1}{4}(\sin\phi + \sin 3\phi) \quad , & \cos\phi\sin^2\phi &= \tfrac{1}{4}(\cos\phi - \cos 3\phi) \\ \sin^3\phi &= \tfrac{1}{4}(3\sin\phi - \sin 3\phi) \quad , & \cos^4\phi &= \tfrac{1}{8}(\cos 4\phi + 4\cos 2\phi + 3) \\ \cos^3\phi\sin\phi &= \tfrac{1}{8}(\sin 4\phi + 2\sin 2\phi) \quad , & \cos^2\phi\sin^2\phi &= \tfrac{1}{8}(1-\cos 4\phi) \\ \cos\phi\sin^3\phi &= \tfrac{1}{8}(2\sin 2\phi - \sin 4\phi) \quad , & \sin^4\phi &= \tfrac{1}{8}(\cos 4\phi - 4\cos 2\phi + 3) \end{aligned}$$

Aufgabe 3) {*Geeignet für Mathematica Funktion* **ContourPlot**$[f, x, x_1, x_2, y, y_1, y_2]$}
In der Ebene $R_3 = 0$ sind die Äquipotentiallinien des Monopolanteils $-\frac{\Gamma m M}{R}$ Kreise um den Ursprung. Beschreiben Sie qualitativ, wie sich die Äquipotentiallinien bei

$R_3 = 0$ durch die einzelnen Multipolterme verändern. Verwenden Sie dazu Polarkoordinaten $R_1 = R\cos\phi$, $R_2 = R\sin\phi$, $R_3 = 0$ und formen Sie die auftretenden Potenzen der trigonometrischen Funktionen um in $\cos(n\phi)$ und $\sin(n\phi)$, $n \in \{0,1,2,3,4\}$. Zeigen Sie dadurch, daß die Multipolentwicklung bis zur 4. Ordnung in die folgende Form gebracht werden kann:

$$\begin{aligned}
V(R,\phi,R_3=0) &\approx -\frac{\Gamma m M}{R}(1 + \frac{1}{R^2}(q_{20}\sin 2\phi + q_{00} + q_{02}\cos 2\phi) \\
&+ \frac{1}{R^3}(s_{30}\sin 3\phi + s_{10}\sin\phi + s_{01}\cos\phi + s_{03}\cos 3\phi) \\
&+ \frac{1}{R^4}(o_{40}\sin 4\phi + o_{20}\sin 2\phi + o_{00} + o_{02}\cos 2\phi + o_{04}\cos 4\phi)
\end{aligned}$$

und erklären Sie die unten skizzierten Potentialveränderungen, die von den einzelnen Termen hervorgerufen werden.



$\sin 2\phi$ $\quad\cos 2\phi$ $\quad\sin 3\phi$ $\quad\cos 3\phi$ $\quad\sin 4\phi$ $\quad\cos 4\phi$