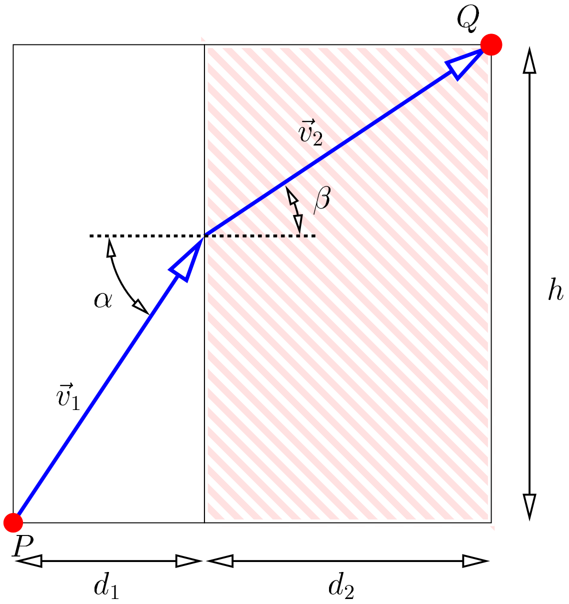
Übungen zur theoretischen Mechanik (Rose/Hoffstätter)

15/16.1.1997, Anleitung für die Betreuung der Präsenzübung Nr. 10

Aufgabe 1) Ein Teilchen läuft im linken Halbraum vom Punkt P mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_1$ nach rechts und wird an der Grenzfläche auf die Geschwindigkeit $\vec{v}_2$ abgebremst, mit der es dann im rechten Halbraum bis zum Punkt Q weiterfliegt. In welchem Verhältnis steht der Sinus des Einfallswinkels α zum Sinus des Ausfallswinkel β, wenn der Weg eingeschlagen wird, auf dem das Teilchen am schnellsten von P nach Q gelangt? Erhalten Sie dieses Ergebnis auf zwei verschiedenen Wegen,



a) indem Sie die Flugzeit als Funktion von α berechnen und dasjenige α bestimmen, bei dem diese Zeit $T = \frac{d_1}{v_1 \cos\alpha} + \frac{d_2}{v_2 \cos\beta}$ ein Extremum hat. Um nach α abzuleiten, muß man zunächst $\frac{d\beta}{d\alpha}$ berechnen. Dazu muß man $h = d_1 \tan\alpha + d_2 \tan\beta$ nach α ableiten. Man erhält schließlich

$$\frac{dT}{d\alpha} = \frac{d_1}{v_1}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{d_1}{v_2}\frac{\sin\beta}{\cos^2\alpha} = 0\ .$$

b) indem Sie die Flugzeit als Integral $T = \int_P^Q \frac{ds}{v(x)} = \int_P^Q \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x)}dx = \int_P^Q F dx$ schreiben und das Minimieren der Flugzeit als Variationsproblem auffassen, das mit Hilfe der Eulerschen Ableitung $(\partial_{y'}F)' = \partial_y F$ gelöst werden kann. Dabei muß die x–Ableitung nicht durchgeführt werde, da sich schon vorher $\partial_{y'}F = \frac{y'}{v(x)\sqrt{1+y'^2}}$ als konstant erweist. Mittels $y' = \tan\alpha$ oder $y' = \tan\beta$ erhält man nun die Beziehung

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}\ .$$

c) Wie kommt man am schnellsten von P nach Q, wenn die Geschwindigkeit linear auf 0 abnimmt $v(x) = v_1(1 - \frac{x}{d1+d2})$? Bestimmen Sie dazu $y(x)$ aus $\frac{y'}{v(x)\sqrt{1+y'^2}} = K$ für eine willkürliche Konstante K. Damit ist dann $y(x) = \frac{d_1+d_2}{v_1 K}\sqrt{1-(v_1 K)^2} + C$ mit einer Konstanten C. Die Konstanten bestimmt sich dann aus $y(0) = 0$ und $y(d1+d2) = h$ zu $C = \frac{h^2-(d_1+d_2)^2}{2h}$ und $K = \frac{2hD}{v_1(h^2+D^2)}$.