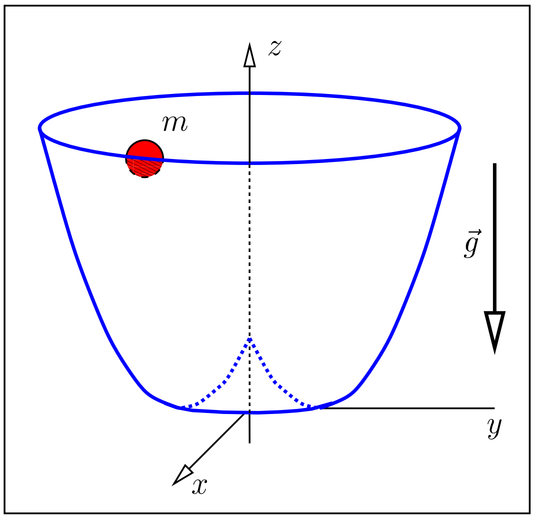
Übungen zur theoretischen Mechanik (Rose/Hoffstätter)

22/23.1.1997, Anleitung für die Betreuung der Präsenzübung Nr. 11

Aufgabe 1) Ein Massepunkt m bewege sich unter Einfluß der Schwerkraft $-mg\vec{e}_z$ auf dem Mantel eines Paraboloiden mit dem Profil $z = A(\rho - \rho_0)^2$. Berechnen Sie die Lagrangefunktion zu



$$L(\rho, \phi, \dot{\rho}, \dot{\phi}) = -mgA(\rho - \rho_0)^2 + \frac{m}{2}\{\dot{\rho}^2[1 + 4A^2(\rho - \rho_0)^2] + \rho^2\dot{\phi}^2\} \ .$$

Berechnen Sie daraus die kanonischen Impulse $p_\rho = \partial_{\dot{\rho}} L$ und $p_\phi = \partial_{\dot{\phi}} L$ und die Hamiltonfunktion. Die Abkürzung $B = 1 + 4A^2(\rho - \rho_0)^2$ ist hilfreich, um

$$H = \frac{1}{2m}(\frac{p_\rho^2}{B} + \frac{p_\phi^2}{\rho^2}) + mgA(\rho - \rho_0)^2$$

auszudrücken. Berechnen Sie nun mit den Hamiltonschen Gleichungen $\frac{d}{dt}\vec{q} = \partial_{\vec{p}} H$ und $\frac{d}{dt}\vec{p} = -\partial_{\vec{q}} H$ die Bewegungsgleichungen $\dot{\phi}(t) = \frac{L}{m\rho^2}$ mit dem konstanten Drehimpuls L und

$$\ddot{\rho} = -2\frac{gA}{B}(\rho - \rho_0) + \frac{L^2}{m^2 B \rho^3} - 4\dot{\rho}^2\frac{A^2}{B}(\rho - \rho_0) \ .$$

a) Lösen Sie nun das Problem für den Spezialfall der Kreisbewegung ($\dot{\rho} = 0$) und bringen Sie Ihre Lösung auf die Form $\phi(t) = \omega t$, $\rho(t) = \rho_0 \frac{2Ag}{2Ag - \omega^2} = R_0$. Betrachten Sie sowohl den Fall für positive als auch den für negative A.

b) Wann ist diese Kreisbahn stabil gegen kleine Auslenkungen? Mit welcher Frequenz oszilliert die Masse um diese stabile Kreisbahn, wenn Sie ein wenig von dieser Bahn ausgelenkt wird? Behandeln Sie auch hier sowohl positive wie auch negative A. Verwenden Sie dazu $B_0 = 1 + 4A^2(R_0 - \rho_0)^2$ und $\rho(t) = R_0 + \delta(t)$. Beim Linearisieren wird $\dot{\rho}^2 = \dot{\delta}^2$ vernachlässigt und

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}(t) &= (-2\frac{gA}{B_0}(R_0 - \rho_0) + \frac{L^2}{m^2 B_0 R_0^3})\frac{B_0}{B} - 2\frac{gA}{B_0}\delta - \frac{L^2}{m^2 B_0 R_0^3} 3\frac{\delta}{R_0} \\ &= -(\frac{2gAm^2R_0^4 + 3L^2}{m^2 R_0^4 B_0})\delta(t) \end{aligned}$$

Vereinfachen Sie diese Gleichung mit $2gA(R_0 - \rho_0) = \frac{L^2}{m^2 R_0^3}$ zu $\ddot{\delta} = -\frac{2gA}{R_0 B_0}(4R_0 - 3\rho_0)\delta$.