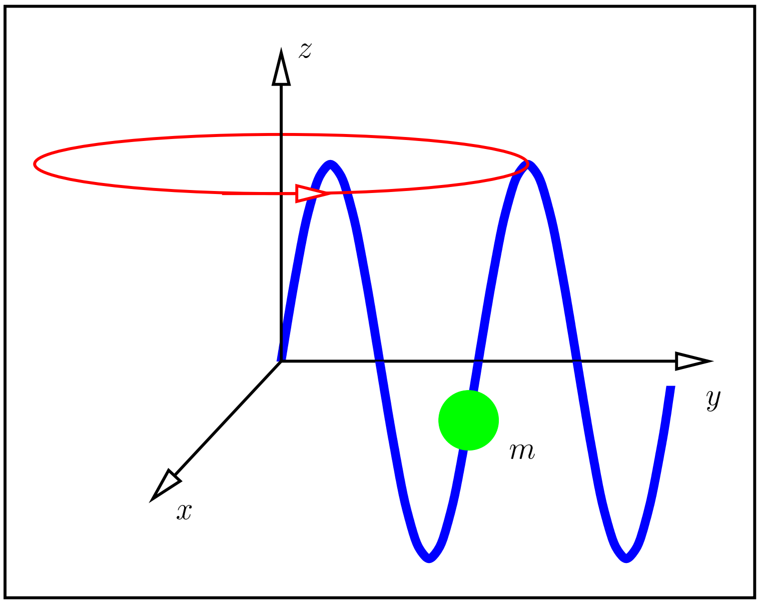
Übungen zur theoretischen Mechanik (Rose/Hoffstätter)

29/30.1.1997, Anleitung für die Betreuung der Präsenzübung Nr. 12

Aufgabe 1) Auf einem drehbar gelagerten Draht mit Profil $z = A \sin k\rho$ ist eine Perle reibungsfrei beweglich. Es wirkt die Schwerkraft $-mg\vec{e}_z$. Berechnen Sie die Kurven (ρ, p_ρ) im Phasenraum als Funktion der Energie E und des Drehimpulses L. Dazu müssen Sie zunächst die Hamiltonfunktion zu



$$H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2m\rho^2} + mgA \sin k\rho$$

berechnen. Identifizieren Sie nun p_ϕ mit dem konstanten Drehimpuls L und verwenden Sie, daß die Hamiltonfunktion wegen $\frac{d}{dt}H = \partial_t H = 0$ die konstante Energie E beschreibt. Damit erhalten Sie die Phasenraumkurven

$$p_\rho^2 = (E - mgA \sin k\rho)2m - \frac{L^2}{\rho^2} \ .$$

Aufgabe 2) Leiten Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung mit $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ für konservative Kräfte

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}(\vec{r}, t) = -\partial_{\vec{r}} V(\vec{r}, t)$$

aus einer Lagrangefunktion $L(\vec{r}, \vec{v}, t)$ her. Wie kann man die drei Lagrangegleichungen für kartesische Koordinaten formal zu einer Vektorgleichung zusammenfassen? Mit dieser formalen Schreibweise $\frac{d}{dt}(\partial_{\vec{v}} L) = \partial_{\vec{r}} L$ ergibt $L = \frac{1}{2}mv^2 - V(\vec{r}, t)$ sofort die Newtonsche Bewegungsgleichung. Berechnen Sie nun die Hamiltonfunktion $H = \vec{p} \cdot \vec{v} - L$ und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen $\frac{d}{dt}\vec{r} = \partial_{\vec{p}} H$ und $\frac{d}{dt}\vec{p} = -\partial_{\vec{r}} H$.

Aufgabe 3) Zeigen Sie, daß sich die relativistische Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\vec{v}) = \vec{F} = -\partial_{\vec{r}} V(\vec{r}, t) \ , \quad \gamma = \sqrt{(\frac{\vec{p}}{mc})^2 + 1}$$

aus der Hamiltonfunktion

$$H(\vec{p}, \vec{r}, t) = c\sqrt{\vec{p}^2 + (mc)^2} + V(\vec{r}, t)$$

ergibt. Leiten Sie daraus mit $\gamma = 1/\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}$ die relativistische Lagrangefunktion $L = -\frac{mc^2}{\gamma} - V(\vec{r}, t)$ her.