Übungen zur theoretischen Mechanik (Rose/Hoffstätter)

5/6.2.1997, Anleitung für die Betreuung der Präsenzübung Nr. 13

Aufgabe 1) Gegeben sei das geschwindigkeitsabhängige Potential

$$V(\vec{r},\vec{v},t) = q\Phi(\vec{r},t) - q\vec{A}(\vec{r},t)\cdot\vec{v}\ .$$

Berechnen Sie die generalisierte Kraft

$$\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t) = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}[\partial_{\vec{v}}V(\vec{r},\vec{v},t)] - \partial_{\vec{r}}V(\vec{r},\vec{v},t)\ ,$$

die sich aus diesem Potential ergibt. Vereinfachen Sie diese Kraft für den Fall, daß Felder $\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t)$ existieren mit

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\partial_{\vec{r}}\Phi(\vec{r},t) - \partial_t\vec{A}(\vec{r},t)\ ,\quad \vec{B}(\vec{r},t) = \partial_{\vec{r}}\times\vec{A}(\vec{r},t)\ .$$

Zeigen Sie mittels $\frac{d}{dt}\vec{A} = \partial_t\vec{A} + (\vec{v}\cdot\partial_{\vec{r}})\vec{A}$ und $\vec{v}\times\vec{B} = \vec{v}\times(\partial_{\vec{r}}\times\vec{A}) = \partial_{\vec{r}}(\vec{v}\cdot\vec{A}) - (\vec{v}\cdot\partial_{\vec{r}})\vec{A}$ dann, daß diese Vereinfachung der Lorentzgleichung

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

entspricht. Berechnen Sie nun die kanonischen Impulse $\vec{p} = \partial_{\vec{v}}L(\vec{r},\vec{v},t)$ und die Hamiltonfunktion $H(\vec{p},\vec{r},t) = \vec{p}\cdot\vec{v} - L$ und leiten Sie damit mittels $\frac{d}{dt}\vec{r} = \partial_{\vec{p}}H$ und $\frac{d}{dt}\vec{p} = -\partial_{\vec{r}}H$ die Bewegungsgleichungen her. Zeigen Sie dabei auch, daß die Hamiltonfunktion

$$H(\vec{p},\vec{r},t) = \frac{(\vec{p} - q\vec{A}(\vec{r},t))^2}{2m} + q\Phi(\vec{r},t)$$

gerade der Gesamtenergie entspricht.

Aufgabe 2) Zeigen Sie dann, daß mit der obigen Beziehung für die Felder $\vec{E}$, $\vec{B}$ und die Potentiale $\vec{A}$, Φ die Lorentzgleichung aus der Hamiltonfunktion

$$H(\vec{p},\vec{r},t) = c\sqrt{(\vec{p} - q\vec{A}(\vec{r},t))^2 + (mc)^2} + q\Phi(\vec{r},t)$$

folgt und daß sich die Lagrangefunktion zu

$$L(\vec{r},\vec{v},t) = -\frac{mc^2}{\gamma} - q\Phi(\vec{r},t) + q\vec{A}(\vec{r},t)\cdot\vec{v}\ ,\quad \gamma = \frac{1}{1-(\frac{v}{c})^2}$$

ergibt. Berechnen Sie nun aus dieser Lagrangefunktion die Bewegungsgleichung.