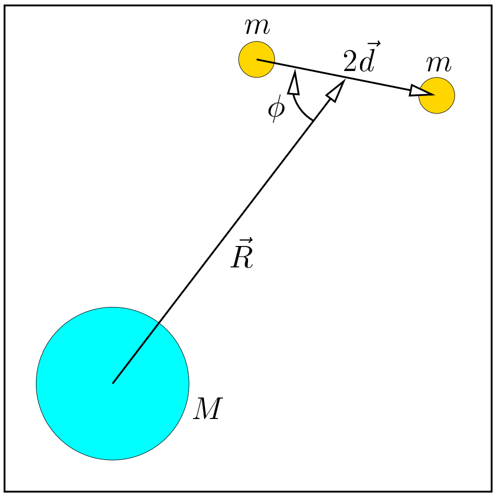
Übungen zur theoretischen Mechanik (Rose/Hoffstätter)

13/14.11.1997, Präsenzübung Nr. 3

Aufgabe 1) Zeigen Sie, daß $\rho = \frac{A}{1+\epsilon\cos\phi}$ einen Kegelschnitt beschreibt, indem Sie diese Formel auf kartesische Koordinaten umschreibt. Leiten Sie für die Ellipse, die im Fall $\epsilon < 1$ beschrieben wird, die Fläche $\frac{\pi A^2}{\sqrt{1-\epsilon^2}^3}$ und den Abstand zwischen Mittelpunkt und Brennpunkt $\Delta = \frac{\epsilon A}{1-\epsilon^2}$ her.

Aufgabe 2) Zwei identische im Abstand $2d$ starr verbundene Massen m bewegen sich in einem gravitativen Zentralpotential.



a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des Schwerpunkts $\vec{R}$ der kleinen Massen in erster Ordnung $\frac{d}{R}$. Zeigen Sie dabei, daß sich bei der Reihenentwicklung der Gesamtkraft

$$\vec{F} = -\Gamma M m \cdot \left(\frac{\vec{R}+\vec{d}}{|\vec{R}+\vec{d}|^3} + \frac{\vec{R}-\vec{d}}{|\vec{R}-\vec{d}|^3}\right)$$

alle Terme erster Ordnung wegheben und der Schwerpunkt eine gewöhnliche Keplerbewegung vollzieht.

b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des Winkels ϕ zwischen $\vec{R}$ und dem Abstandsvektor $\vec{d}$ aus dem Drehmoment

$$\vec{D} = -\Gamma M m \cdot \left(\frac{\vec{d}\times(\vec{R}+\vec{d})}{|\vec{R}+\vec{d}|^3} - \frac{\vec{d}\times(\vec{R}-\vec{d})}{|\vec{R}-\vec{d}|^3}\right) .$$

im Schwerpunktsystem der kleinen Massen. In diesem System ist der Drehimpuls $L = 2md^2\dot{\phi}$ und $\frac{d}{dt}L = 2md^2\ddot{\phi}$. Die Entwicklung bis zur zweiten Ordnung in $\frac{d}{R}$ ergibt eine erste Näherung für die Bewegungsgleichung. Welche Bedeutung hat die Tatsache, daß sich die Schwingungsgleichung eines physikalischen Pendels ergibt: $\ddot{\phi} + \frac{3\Gamma M}{2R^3}\sin(2\phi)$? Läßt sich mit diesem Ergebnis verstehen, warum der Mond uns immer die gleiche Seite zuwendet?