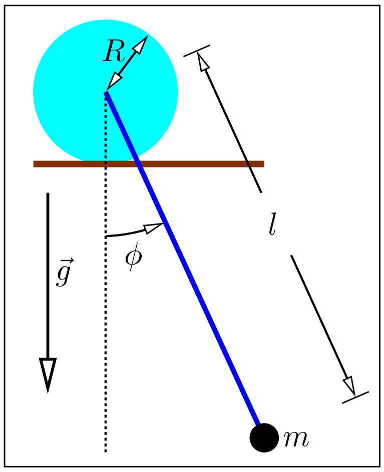
Übungen zur theoretischen Mechanik (Rose/Hoffstätter)

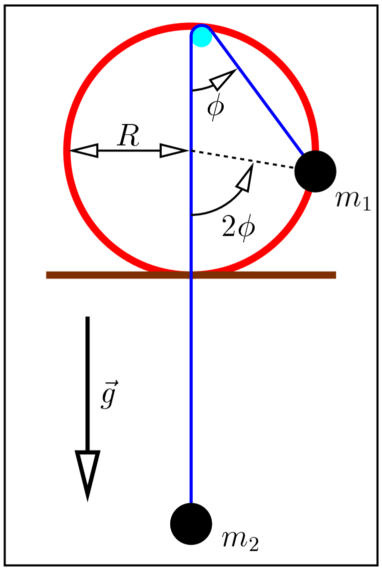
20/21.11.1997, Anleitung für die Betreuung der Präsenzübung Nr. 4



Aufgabe 1) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Winkel ϕ des abgebildeten Pendels auf indem Sie das d'Alambertsche Prinzip $(\vec{F}-\dot{\vec{p}})\cdot\vec{\delta}_{\vec{r}}$ verwenden. Zeigen Sie dazu zunächst, daß sich der Vektor $\vec{r}$ und der Impuls $\vec{p}$ als Funktion des Winkels ϕ darstellen lassen durch

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \begin{pmatrix} l\sin\phi - R\phi \\ l\cos\phi \end{pmatrix} ,\\ \vec{p} &= m\dot{\phi}\begin{pmatrix} l\cos\phi - R \\ -l\sin\phi \end{pmatrix} ,\end{aligned}$$

und leiten Sie sodann mit $\vec{\delta}_{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{d\phi}\delta_\phi$ die Bewegungsgleichung
$(2Rl\cos\phi - l^2 - R^2)\ddot{\phi} - Rl\sin\phi\dot{\phi}^2 = gl\sin\phi$ her. Linearisieren Sie diese Bewegungsgleichung für kleine ϕ, $\dot{\phi}$ und diskutieren Sie den Grenzfall $R\to 0$. In diesem Grenzfall finden Schwingungen mit Winkelfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ statt.



Aufgabe 2) Eine Masse m_1 ist so geführt, daß sie sich reibungsfrei auf einem Kreis in einer vertikalen Ebene bewegen kann. Am höchsten Punkt des Kreises sei eine Umlenkrolle starr befestigt, über die eine Schnur läuft, die m_1 mit einer zweiten Masse m_2 verbindet. Gesucht ist die Bewegungsgleichung des Winkels ϕ. Stellen Sie dazu die Koordinaten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ als Funktion des Winkels dar. Daraus ergeben sich die Impulse $\vec{p}_i = \frac{d\vec{r}_i}{d\phi}\dot{\phi}$ und die virtuellen Verrückungen $\vec{\delta}_{\vec{r}_i} = \frac{d\vec{r}_i}{d\phi}\delta_\phi$, die beim d'Alambertschen Prinzip $\sum_{i=1}^{2}(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i)\cdot\vec{\delta}_{\vec{r}_i}$ zum Einsatz kommen. Leiten Sie mit diesem Prinzip die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}2R(m_1 + m_2\sin^2\phi) &+ m_2R\dot{\phi}^2\sin 2\phi \\ -g\sin\phi(m_2 - 2m_1\cos\phi) &= 0\end{aligned}$$

her. Linearisieren Sie die Bewegungsgleichung um die beiden Gleichgewichtslagen $\phi = 0$ und $m_2 - 2m_1\cos\phi = 0$, die Sie durch $-g\sin\phi(m_2 - 2m_1\cos\phi) = 0$ finden. Zeigen Sie dann, daß die erste Gleichgewichtslage wegen $\ddot{\phi} = \frac{g}{2Rm_1}(m_2 - 2m_1)\phi$ für $m2 < 2m_1$ stabil und für $m2 > 2m_1$ instabil ist. Die zweite ist hingegen mit $\phi = \phi_0 + \delta$, $m_2 - 2m_1\cos\phi_0 = 0$ und $\ddot{\delta}2R(m_1 + m_2\sin^2\phi_0) = 2m_1 g\sin^2\phi_0\delta$ immer instabil.