Übungen zur theoretischen Mechanik (Rose/Hoffstätter)

27/28.11.1997, Anleitung für die Betreuung der Präsenzübung Nr. 5

Aufgabe 1) Finden von Extrema mittels Lagrangescher Multiplikatoren
Gegeben sei eine Funktion $f(\vec{r})$ mit $\vec{r} \in I\!R^n$ und $\vec{r}$ sei ein Punkt aus der Punktmenge mit $g(\vec{r}) = 0$. An jedem Extremum von $f(\vec{r})$ in dieser Punktmenge gilt

$$\begin{aligned} \partial_i f(\vec{r}) + \lambda \partial_i g(\vec{r}_i) &= 0 \ , \\ g(\vec{r}) &= 0 \ . \end{aligned}$$

Wie kann man aus diesen $n+1$ Gleichungen mit $n+1$ Unbekannten die Position eines Extremums $\vec{r}_m$ bestimmen? Zeigen Sie, daß an jedem Extremum diese Bedingungen gelten müßen, indem Sie

a) anschaulich argumentieren.

b) die n-te Komponente r_n als Funktion der anderen $n-1$ Komponenten auffassen und so ein Extremum von $f(r_1, \ldots, r_{n-1}, r_n(r_1, \ldots, r_{n-1}))$ im $I\!R^{n-1}$ durch Gradientenbildung suchen. Dabei muß benutzt werden, daß die Variation von $g(r_1, \ldots, r_{n-1}, r_n(r_1, \ldots, r_{n-1})) = 0$ gegeben ist durch

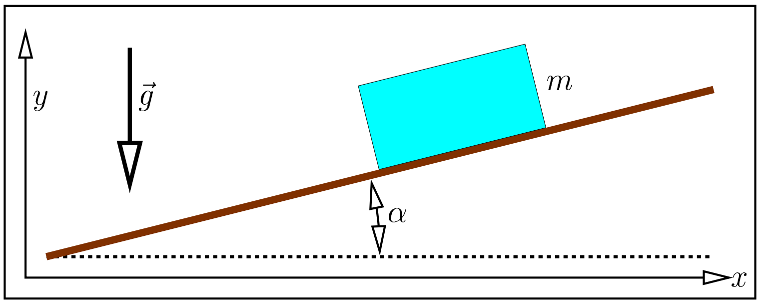
$$dg = \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i g(\vec{r}) dr_i + \partial_n g(\vec{r}) \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i r_n dr_i = \sum_{i=1}^{n-1} (\partial_i g(\vec{r}) + \partial_n g(\vec{r}) \partial_i r_n) dr_i = 0$$

und für jede Koordinatenrichtung verschwindet.

Verallgemeinern Sie dieses Konzept auf $m < n$ Nebenbedingungen $g_j(\vec{r}) = 0$, $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Aufgabe 2) Finden Sie die Bewegungsgleichung einer Masse m, die reibungsfrei auf einer schiefen Ebene im Schwerefeld gleitet, indem Sie eine horizontale x und eine vertikale y Achse verwenden und die Zwangsbedingung $g(\vec{r}) = y - \tan \alpha x = 0$ berücksichtigen. Verwenden Sie dazu die Lagrangegleichungen erster Art,

$$\vec{F} - m\ddot{\vec{r}} + \lambda \partial_{\vec{r}} g(\vec{r}) = 0 \ , \quad g(\vec{r}) = 0 \implies \ddot{y} = -g \sin^2 \alpha \ .$$



Aufgabe 3) Finden Sie den integrierenden Faktor der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} \frac{\cos(y)}{\sin(y)} \ .$$

Dazu schreibt man die Differentialgleichung um in

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ , \quad dy f(\vec{r}) + dx g(\vec{r}) = 0$$

und versucht diese Gleichung umzuformen in $d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\Phi(x,y) = 0$. Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind dann Niveaulinien von $\Phi(\vec{r})$. Wenn $\partial_x f(\vec{r})$ nicht gleich $\partial_y g(\vec{r})$ ist, muß ein Integrierender Faktor $\lambda(\vec{r})$ gefunden werden, der $dy\lambda(\vec{r})f(\vec{r}) + dx\lambda(\vec{r})g(\vec{r}) = 0$ als Gradient schreiben läßt. Zeigen Sie daß im gegebenen Fall $\Phi(\vec{r}) = \sin(2x)\cos^2(y)$.