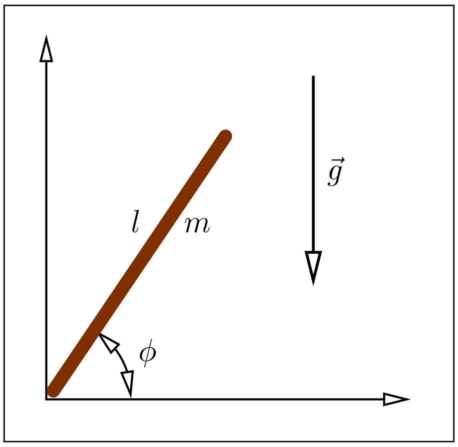
Übungen zur theoretischen Mechanik (Rose/Hoffstätter)

4/5.12.1997, Anleitung für die Betreuung der Präsenzübung Nr. 6

Aufgabe 1) Ein homogener Stab der Masse m und der Länge l fällt um. Berechnen Sie $\dot\phi(\phi)$ bei $\dot\phi(\phi_0) = 0$. Berechnen Sie dazu den Drehmoment um den Ursprung



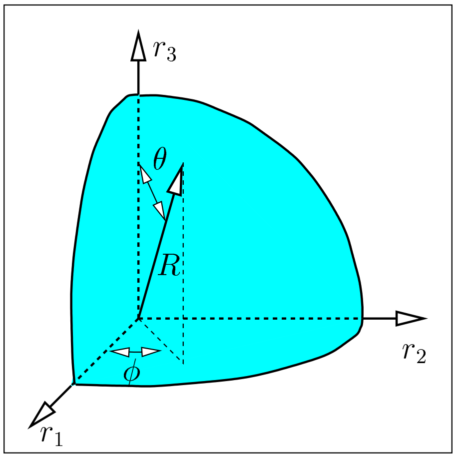
$$D = mg\frac{l}{2}\cos\phi$$

und den Drehimpuls

$$L = \int_0^m r \cdot v_\phi dm = \dot\phi \frac{m}{l}\int_0^l r^2 dr \ .$$

Berechnen Sie nun aus $D = \dot L$ die Lösung $\dot\phi(\phi) = -\sqrt{3\frac{g}{l}(\sin\phi_0 - \sin\phi)}$.

Aufgabe 2) Berechnen Sie den Trägheitstensor $\Theta_{ij} = \int \rho(\vec r)(r^2\delta_{ij} - r_i r_k)d^3\vec r$ einer homogenen Achtelkugel mit Radius R und Masse m und deren Trägheitstensor im Hauptachsensystem. Die Achtelkugel ist in Kugelkoordinaten gegeben durch $0 \le r \le R$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ und $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$. Wenn Sie bei der Integration in Kugelkoordinaten berücksichtigen, daß



$$d^3\vec r = r^2 \sin\theta d\phi d\theta dr \ ,$$

$$\begin{aligned} r_1 &= x = r\sin\theta\cos\phi \ , \\ r_2 &= y = r\sin\theta\sin\phi \ , \\ r_3 &= z = r\cos\theta \ , \end{aligned}$$

so erhalten Sie

$$\underline{\underline{\Theta}} = \frac{R^5}{15}\begin{pmatrix} \pi & -1 & -1 \\ -1 & \pi & -1 \\ -1 & -1 & \pi \end{pmatrix} .$$

Die eine Hauptachse ist offensichtlich $(1,1,1)$ mit dem Hauptträgheitsmoment $\frac{R^5}{15}(\pi - 2)$. Die beiden hierzu senkrecht stehenden Achsen $(1,-2,1)$ und $(1,0,-1)$ sind ebenfalls Eigenvektoren von $\underline{\underline{\Theta}}$, beide mit dem Eigenwert $\frac{R^5}{15}(\pi + 1)$.