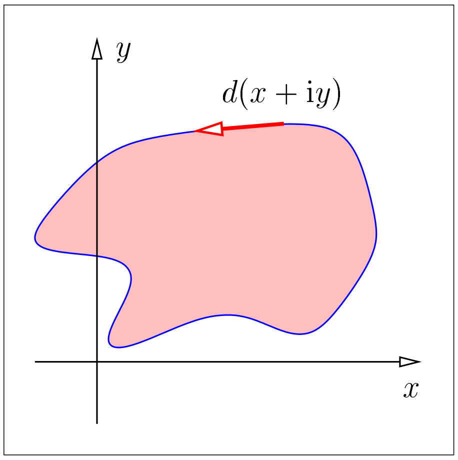
Übungen zur theoretischen Mechanik (Rose/Hoffstätter)

11/12.12.1997, Anleitung für die Betreuung der Präsenzübung Nr. 7

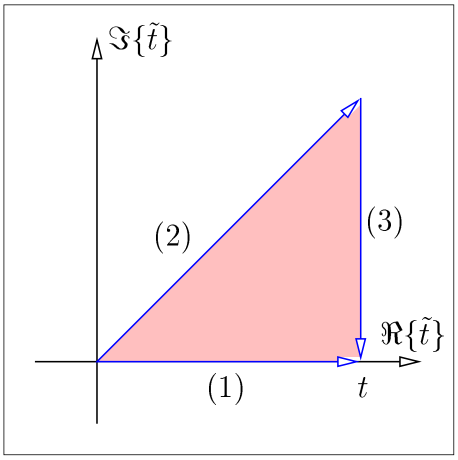
Aufgabe 1)

a) Berechnen Sie das Integral $J(a) = \int_0^\infty e^{-a\tilde{t}^2} d\tilde{t}$ für $a > 0$. Bilden Sie dazu $J = \sqrt{\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)}dxdy}$ und integrieren Sie in Polarkoordinaten über die gesamte x–y Ebene, um $J = \sqrt{\frac{\pi}{4a}}$ zu erhalten.



b) Zeigen Sie, daß jedes geschlossene Wegintegral $\oint f(x + \mathrm{i}y)d(x + \mathrm{i}y)$ in der komplexen Ebene verschwindet, wenn die Funktion $f(x + \mathrm{i}y)$ innerhalb des geschlossenen Weges differenzierbar ist. Dazu setzt man zunächst $\vec{r} = (x, y)$ und schreibt den Realteil und den Imaginärteil des Integrals als Wegintegral über die Vektorfelder $\vec{v}(\vec{r}) = (\Re\{f\}, -\Im\{f\})$ und $\vec{w}(\vec{r}) = (\Im\{f\}, -\Re\{f\})$, und man zeigt dann, daß die Rotation dieser Vektorfelder verschwindet.

c) Berechnen Sie den Grenzwert des Integrals $I(a) = \int_0^\infty e^{\mathrm{i}a\tilde{t}^2} d\tilde{t}$ für $a > 0$. Betrachten Sie dafür das Umlaufintegral in der komplexen Ebene, das in der Abbildung beschrieben ist. Da nach Teilaufgabe b) das Umlaufintegral verschwindet, ist das Integral entlang des Weges (1) gleich der Summe der beiden Integrale entlang der Wege (2) und (3). Zeigen Sie nun, daß das Integral entlang des Weges (3) beim Grenzübergang $t \to \infty$ verschwindet. Der Betrag des Integrals entlang des Weges (3) ist gegeben durch $|\lim_{R\to\infty} \int_0^\infty e^{ia(R+i\tau)^2} id\tau| = \lim_{R\to\infty} |\int_0^\infty e^{-2aR\tau} e^{ia(R^2-\tau^2)} id\tau| \leq \lim_{R\to\infty} 2\int_0^\infty e^{-2aR\tau} d\tau = 0$. Das gesamte Integral $I(a)$ entlang des Weges (1) ist also identisch mit dem Integral entlang des Weges (2),



$$I(a) = \int_0^\infty e^{-a\tilde{t}^2} \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} d\tilde{t} = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{4a}} .$$

d) Die Funktion

$$F(t) = \int_0^t e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\tilde{t}^2} d\tilde{t}$$

heißt Fresnelintegral. Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{t\to\infty} F(t) \text{ und } \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{\sin(\alpha)}{2\sqrt{\alpha}} d\alpha .$$