Übungen zur theoretischen Mechanik (Rose/Hoffstätter)

18/19.12.1997, Anleitung für die Betreuung der Präsenzübung Nr. 8

Aufgabe 1) Ein kräftefreier Kreisel mit zwei identischen Hauptträgheitsmomenten $\Theta_\xi = \Theta_\eta = \Theta_2 < \Theta_\zeta$ rotiert zur Zeit $t = 0$ im körperfesten Bezugssystem um

$$\vec{\omega}_K = \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} .$$

Wie verhält sich der Kreisel im weiteren Verlauf seiner Bewegung? Wenn $\vec{L}_K$ den Drehimpuls im körperfesten Bezugssystem und $\vec{L}_L$ den Drehimpuls im Laborsystem bezeichnen, dann gilt

$$\frac{d\vec{L}_L}{dt} = \frac{d\vec{L}_K}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}_K = 0 ,$$

da kein Drehmoment wirkt. Mit $\vec{L}_K = \underline{\underline{\Theta}}\vec{\omega}_K$ ergeben sich daraus die Eulerschen Gleichungen

$$\underline{\underline{\Theta}}\dot{\vec{\omega}}_K + \vec{\omega} \times (\underline{\underline{\Theta}}\vec{\omega}_K) = 0 .$$

Aus der ζ–Komponente dieser Gleichung ergibt sich mit $\Theta_\xi = \Theta_\eta$, daß $\omega_\zeta(t) = \omega_0$ wärend der Bewegung konstant ist. Die ξ und die η–Komponente ergeben dann Schwingungsgleichungen für ω_ξ und ω_η mit der Schwingungsfrequenz $\lambda = \omega_0(\frac{\Theta_\zeta}{\Theta_2} - 1)$. Mit den Anfangsbedingungen erhalten Sie nun

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \cos \lambda t \\ -\omega_1 \sin \lambda t \\ \omega_0 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 2) Zwei Massen m_1 und m_2 mit den Impulsen $\vec{p}_{1,0}$ und $\vec{p}_{2,0}$ streuen elastisch aneinander. Der Streuwinkel im Schwerpunktsystem sei θ. Das Schwerpunktsystem ist für relativistische wie für nichtrelativistische Impulse ist dasjenige System, in dem der Gesamtimpuls $\vec{p} = \vec{p}_{1,0} + \vec{p}_{2,0}$ verschwindet.

a) Zeigen Sie für den nichtrelativistische Fall, daß die Anfangsimpulse $\vec{\tilde{p}}_{1,0}$ und $\vec{\tilde{p}}_{2,0}$ im Schwerpunktsystem gegeben sind durch $m = m_1 + m_2$,

$$\vec{\tilde{p}}_{1,0} = \vec{p}_{1,0} - \frac{m_1}{m}\vec{p} , \quad \vec{\tilde{p}}_{2,0} = \vec{p}_{2,0} - \frac{m_2}{m}\vec{p} .$$

b) Geben Sie für nichtrelativistische Impulse die Endimpulse $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$ im Laborsystem an. Besonders einfach stellt sich das Ergebnis in einem Matrizenformalismus dar, wenn man erweiterte Impulse einführt,

$$\begin{aligned}
R_\phi &= \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} , \quad I\!I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad P_i = \begin{pmatrix} m_i \\ \vec{p}_i \end{pmatrix} , \\
T &= \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \frac{\vec{p}}{m} & I\!I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R_\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ -\frac{\vec{p}}{m} & I\!I \end{pmatrix} , \\
P_1 &= TP_{1,0} \ , \quad P_2 = TP_{2,0} \ .
\end{aligned}$$

c) Im relativistische Fall wird einem Teilchen mit Impuls $\vec{p}_i$ und Masse m_i ein Viererimpulse P_i^μ mit

$$P_i = \begin{pmatrix} m_i c \gamma_{p_i} \\ \vec{p}_i \end{pmatrix}$$

zugeordnet. Dabei ist $\gamma_{p_i} = \sqrt{(\frac{p_i}{m_i c})^2 + 1}$. Der Viererimpuls $\tilde{P}_i^\mu$ dieses Teilchens in einem System, daß sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt, berechnet sich durch eine Lorentztransformation, die von $\vec{v}$ und $\gamma_v = 1/\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}$ abhängt,

$$\begin{aligned}
m_i c \gamma_{\tilde{p}_i} &= \gamma_v (m_i c \gamma_{p_i} - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{p}_i) \\
\vec{\tilde{p}}_i &= \gamma_v (\vec{p}_{i||} - \vec{v} m_i \gamma_{p_i}) + \vec{p}_{i\perp} = \vec{p}_i + (\gamma_v - 1) \frac{1}{v^2} \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{p}_i) - \gamma_v \vec{v} m_i \gamma_{p_i} \ .
\end{aligned}$$

Diese Transformation läßt sich durch eine Matrix einfach darstellen, wenn man die Notation $M = \vec{v}\vec{v}^T$ benutzt, für die $M_{ij} = v_i v_j$,

$$\begin{pmatrix} m_i c \gamma_{\tilde{p}_i} \\ \vec{\tilde{p}}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_v & -\gamma_v \vec{\beta}^T \\ -\gamma \vec{\beta} & I\!I + (\gamma_v - 1) \frac{1}{v^2} \vec{v}\vec{v}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_i c \gamma_{p_i} \\ \vec{p}_i \end{pmatrix} = L(\vec{v}) P_i \ .$$

Man schreibt die Transformation für Vierervektoren häufig komponentenweise als $\tilde{P}_i^\mu = \sum_{\nu=0}^4 L_\nu^\mu(\vec{v}) P_i^\nu$. Für den relativistische Fall, sind die Anfangsimpulse $\vec{\tilde{p}}_{1,0}$ und $\vec{\tilde{p}}_{2,0}$ in einem mit $\vec{v}$ bewegten Bezugssystem gegeben durch eine Lorentztransformation

$$\vec{\tilde{P}}_{1,0}^\mu = \sum_{\nu=0}^4 L_\nu^\mu(\vec{v}) P_{1,0}^\nu \ , \quad \vec{\tilde{P}}_{2,0}^\mu = \sum_{\nu=0}^4 L_\nu^\mu(\vec{v}) P_{2,0}^\nu \ .$$

Zeigen Sie, daß $\vec{v} = c^2 \vec{p}/E$ gewählt werden muß, um ins Schwerpunktsystem zu transformieren, wobei E die Gesamtenergie $m_1 c^2 \gamma_1 + m_2 c^2 \gamma_2$ ist und $\vec{p}$ wieder den Gesamtimpuls beschreibt.

c) Geben Sie für relativistische Impulse die Endimpulse $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$ im Laborsystem an. Besonders einfach stellt sich das Ergebnis in einem Matrizenformalismus dar, mit $P^\mu = P_{1,0}^\mu + P_{2,0}^\mu$,

$$T = L(-\frac{c\vec{p}}{E}) \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R_\phi \end{pmatrix} L(\frac{c\vec{p}}{E}) \ , \quad P_1^\mu = T_\nu^\mu P_{1,0}^\nu \ , \quad P_2^\mu = T_\nu^\mu P_{2,0}^\nu \ .$$