Semestralklausur theoretische Physik I (Mechanik) (Rose/Hoffstätter)

10.2.1998

Formeln: Das Trägheitsmoment einer Vollkugel mit Masse M und Radius R ist gegeben durch

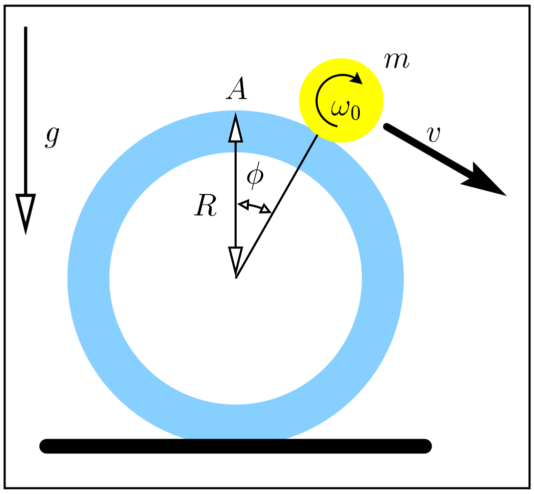
$$\Theta_\bullet = \frac{2}{5} M R^2 \ .$$

Das Trägheitsmoment einer entsprechenden Hohlkugel ist gegeben durch

$$\Theta_\circ = \frac{2}{3} M R^2 \ .$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \ , \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \ .$$

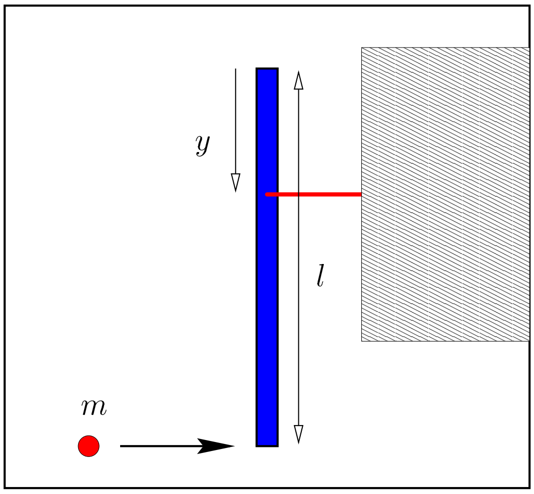
Aufgabe 1) Eine homogene Vollkugel mit Masse m und Radius r rollt reibungsfrei auf einem Zylinder mit Radius R. Im Punkt A hat sie die horizontale Anfangsgeschwindigkeit v_0 und die dazu passende Rotationsgeschwindigkeit ω_0. Es wirkt die Schwerebeschleunigung g.



a) Geben Sie den Winkel ϕ an, bei dem sich die Kugel von dem Zylinder löst.

b) Für welche Werte von v_0 verliert die Kugel den Kontakt mit dem Zylinder bereits im Punkt A?

Aufgabe 2) Gegen das untere Ende eines ruhenden homogenen Balkens stößt ein Massepunkt der Masse m. Auf welcher Höhe y muß sich das Lager befinden, wenn in diesem Lager keine Kraft in horizontaler Richtung erzeugt werden sollen?

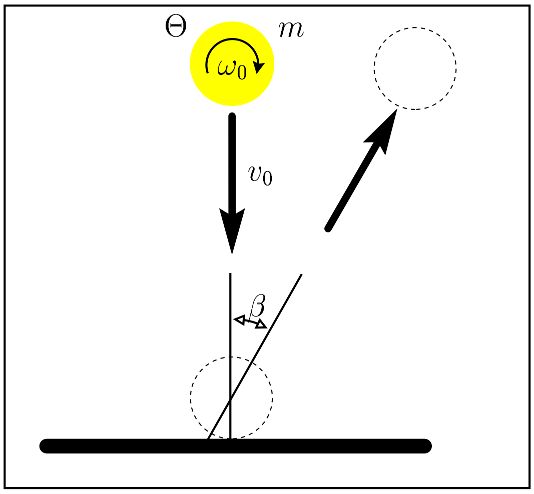


Aufgabe 3) Es soll untersucht werden, welche Konsequenzen die folgende Modifikation des Gravitationspotentials hat:

$$V = V_1 + V_2 \text{ mit } V_1(\vec{r}) = -\gamma m \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}' \ , \quad V_2(\vec{r}) = -\alpha\gamma m \int \rho(\vec{r}') \frac{e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{a}}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \ .$$

Um den Einfluß dieser Modifikation auf den freien Fall zu analysieren, berechnen Sie die Potentiale V_1 und V_2 über der Erdoberfläche in einem Abstand r_0 vom Erdmittelpunkt, wenn für den Erdradius R gilt $R \gg a$. Wie groß ist das Verhältnis der Kräfte $F_2 = -\partial_{r_0} V_2$ und $F_1 = -\partial_{r_0} V_1$ auf der Erdoberfläche ($r_0 = R$) für $\alpha = 10^{-2}$ und $a = 100m$? Die Dichte der Erde soll als konstant angenommen werden. Der Erdumfang ist ungefähr 40Mm.

Aufgabe 4) Eine mit der Kreisfrequenz ω_0 rotierende Kugel (Masse m, Trägheitsmoment Θ und Radius R) trifft mit der Geschwindigkeit v_0 senkrecht auf eine Wand. Man nehme an, daß die Kugel im Moment des Auftreffens so schnell durch Reibung in Bewegung gesetzt wird, daß sie beim Verlassen der Oberfläche nicht mehr durchrutscht, sondern entlang der Oberfläche rollt. Mit welchem Reflexionswinkel β wird die Kugel reflektiert und wie viel Energie ΔE wurde beim Stoßprozeß verbraucht? Berechnen Sie β und ΔE auch für die Spezialfälle der Hohlkugel und der Vollkugel.



Aufgabe 5) Betrachten Sie einen im Schwerefeld gekippten Torus, auf dessen Oberfläche sich ein Massenpunkt der Masse m bewegt. Der Torus sei um den Winkel Ψ aus der Horizontalen gekippt. Der Radius des Rings sei R und der Radius der Röhre ist r.

a) Machen Sie eine Skizze Ihrer Koordinatenwahl, und bestimmen Sie die Lagrangefunktion für den Massenpunkt.

b) Geben Sie die zu den von Ihnen gewählten Koordinaten kanonisch konjugierten Impulse an.

c) Wie lautet die Hamiltonfunktion?

d) Stellen Sie die kanonischen Bewegungsgleichungen für den Massenpunkt auf.

e) Linearisieren Sie die Bewegungsgleichungen und berechnen Sie daraus die Schwingungsfrequenzen für kleine Schwingungen.