Semestralklausur theoretische Physik I (Mechanik) (Rose/Hoffstätter)

10.2.1998

Formeln: Das Trägheitsmoment einer Vollkugel mit Masse M und Radius R ist gegeben durch

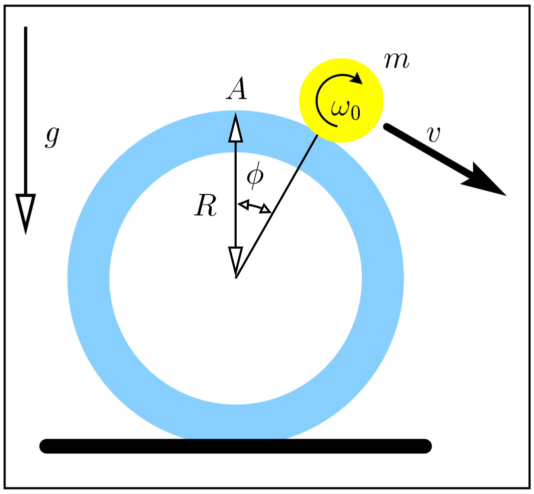
$$\Theta_\bullet = \frac{2}{5} M R^2 \ .$$

Das Trägheitsmoment einer entsprechenden Hohlkugel ist gegeben durch

$$\Theta_\circ = \frac{2}{3} M R^2 \ .$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \ , \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \ .$$

Aufgabe 1) Eine homogene Vollkugel mit Masse m und Radius r rollt reibungsfrei auf einem Zylinder mit Radius R. Im Punkt A hat sie die horizontale Anfangsgeschwindigkeit v_0 und die dazu passende Rotationsgeschwindigkeit ω_0. Es wirkt die Schwerebeschleunigung g.



a) Geben Sie den Winkel ϕ an, bei dem sich die Kugel von dem Zylinder löst.

b) Für welche Werte von v_0 verliert die Kugel den Kontakt mit dem Zylinder bereits im Punkt A?

Die Bedingung dafür, daß die Kugel abhebt, ist: Auflagekraft $<$ Fliehkraft, oder

$$mg\cos\phi < m\frac{v^2}{R+r} \ . \tag{1}$$

Der Energiesatz liefert nun $v(\phi)$, welches in Gleichung (1) eingesetzt wird. Auflösen nach ϕ ergibt dann die Position ϕ, an der die Kugel abhebt. Wenn das Zentrum der Kugel mit der Geschwindigkeit v rollt, so dreht sich die Kugel derart um ihr Zentrum, daß die äußersten Punkte der Kugel sich mit v

drehen. Dies ist die Abrollbedingung. Die Kugel dreht sich demnach mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{v}{r}$. Das Trägheitsmoment einer Kugel ist

$$\frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} \int_{r'<r} (r' sin\theta)^2 r'^2 \sin\theta dr' d\theta d\phi = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} \frac{2\pi}{5} r^5 \int_{-1}^{1} (1-u^2) du = \frac{2}{5} m r^2 \ .$$

Damit ist die Gesamtenergie gegeben durch

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{5} m r^2 \omega_0^2 = m v_0^2 (\frac{1}{2} + \frac{1}{5}) = m v^2 \frac{7}{10} - m g (R+r)(1-\cos\phi) \ , \\ v(\phi)^2 &= v_0^2 + \frac{10}{7} g (R+r)(1-\cos\phi) \ . \end{aligned}$$

Nun läßt sich $v(\phi)^2$ in die Abhebbedingung (1) einsetzen und man erhält

$$g\cos\phi < \frac{v_0^2}{R+r} + \frac{10}{7} g (1-\cos\phi) \ .$$

Auflösen nach ϕ liefert den Winkel, an dem die Kugel sich von dem Zylinder löst.

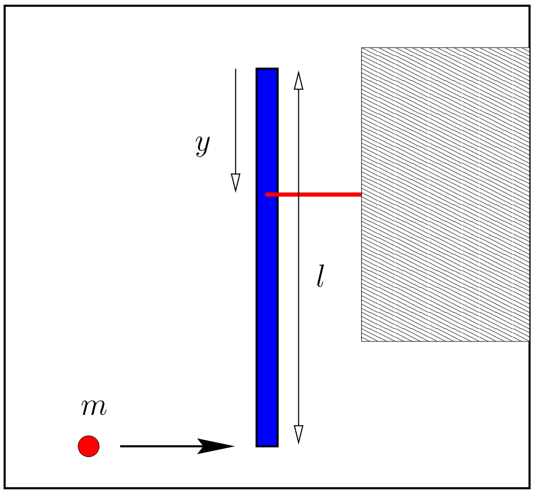
a) Die Kugel löst sich bei

$$\phi = \arccos\{\frac{7v_0^2 + 10g(R+r)}{17g(R+r)}\}$$

vom Zylinder, vorausgesetzt $v_0^2 \leq g(R+r)$.

b) Für $v_0 \geq \sqrt{g(R+r)}$ löst sich die Kugel schon am Punkt A.

Aufgabe 2) Gegen das untere Ende eines ruhenden homogenen Balkens stößt ein Massepunkt der Masse m. Auf welcher Höhe y muß sich das Lager befinden, wenn in diesem Lager keine Kraft in horizontaler Richtung erzeugt werden sollen?



Die Impulserhaltung liefert $mv = mv' + MV$, wobei v und v' die Geschwindigkeiten des Massepunktes vor und nach dem Stoß sind. M ist die Masse und V die Geschwindigkeit des angestoßenen Stabes. Die Drehimpulserhaltung um den Mittelpunkt des Balkens liefert

$$mv\frac{l}{2} = mv'\frac{l}{2} + \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \dot{\phi} \frac{M}{l} dx = mv'\frac{l}{2} + \frac{1}{12} M l^2 \dot{\phi} \ .$$

Aus diesen beiden Erhaltungssätzen folgt nun $V = \frac{1}{6} l \dot\phi$. Die Geschwindigkeit des Balkens bei y ist gegeben durch

$$v(y) = V - \dot\phi(\frac{l}{2} - y) = V(\frac{6y}{l} - 2) \ .$$

Am Punkt C ist $v(y) = 0$ und damit $y = \frac{l}{3}$.

Aufgabe 3) Es soll untersucht werden, welche Konsequenzen die folgende Modifikation des Gravitationspotentials hat:

$$V = V_1 + V_2 \text{ mit } V_1(\vec r) = -\gamma m \int \frac{\rho(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|} d^3\vec r' \ , \quad V_2(\vec r) = -\alpha\gamma m \int \rho(\vec r') \frac{e^{-\frac{|\vec r - \vec r'|}{a}}}{|\vec r - \vec r'|} \ .$$

Um den Einfluß dieser Modifikation auf den freien Fall zu analysieren, berechnen Sie die Potentiale V_1 und V_2 über der Erdoberfläche in einem Abstand r_0 vom Erdmittelpunkt, wenn für den Erdradius R gilt $R \gg a$. Wie groß ist das Verhältnis der Kräfte $F_2 = -\partial_{r_0} V_2$ und $F_1 = -\partial_{r_0} V_1$ auf der Erdoberfläche ($r_0 = R$) für $\alpha = 10^{-2}$ und $a = 100m$? Die Dichte der Erde soll als konstant angenommen werden. Der Erdumfang ist ungefähr 40Mm.

$$\begin{aligned}
V_1(r_0) &= -\gamma m \int_{r<R} \frac{\rho}{|\vec r_0 - \vec r|} d^3\vec r = -\gamma m \int_{r<R} \frac{\rho}{\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0u}} r^2 du d\phi dr \text{ mit } u = \cos\theta \\
&= -\gamma m\rho \int_0^R \frac{-2\pi}{r_0} \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0u}\Big|_{u=-1}^{u=1} r dr = -\gamma m\rho \frac{-2\pi}{r_0} \int_0^R (r_0 - r - r_0 - r) r dr \\
&= -\gamma m\rho \frac{4\pi R^3}{3} \frac{1}{r_0} = -\gamma m M \frac{1}{r_0} \text{ mit } M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \ .
\end{aligned}$$

Entsprechend berechnet man

$$\begin{aligned}
V_2(r_0) &= -\alpha\gamma m \int_{r<R} \frac{\rho}{|\vec r_0 - \vec r|} e^{-\frac{|\vec r_0 - \vec r|}{a}} d^3\vec r = -\alpha\gamma m 2\pi\rho \frac{a}{r_0} \int_0^R e^{-\frac{\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0u}}{a}} \Big|_{u=-1}^{u=1} r dr \\
&= -\alpha\gamma m 2\pi\rho \frac{a}{r_0} \int_0^R (e^{-\frac{r_0 - r}{a}} - e^{-\frac{r_0 + r}{a}}) r dr = -\alpha\gamma m 4\pi\rho \frac{a}{r_0} e^{-\frac{r_0}{a}} \int_0^R \sinh(\frac{r}{a}) r dr \\
&= -\alpha\gamma m 4\pi\rho \frac{a}{r_0} e^{-\frac{r_0}{a}} \{aR\cosh(\frac{R}{a}) - a\int_0^R \cosh(\frac{r}{a}) dr\} \\
&= -\alpha\gamma m 4\pi\rho \frac{a}{r_0} e^{-\frac{r_0}{a}} \{aR\cosh(\frac{R}{a}) - a^2 \sinh(\frac{R}{a})\} \ .
\end{aligned}$$

Aus $R >> a$ folgt $e^{\frac{R}{a}} >> e^{-\frac{R}{a}}$ und daher

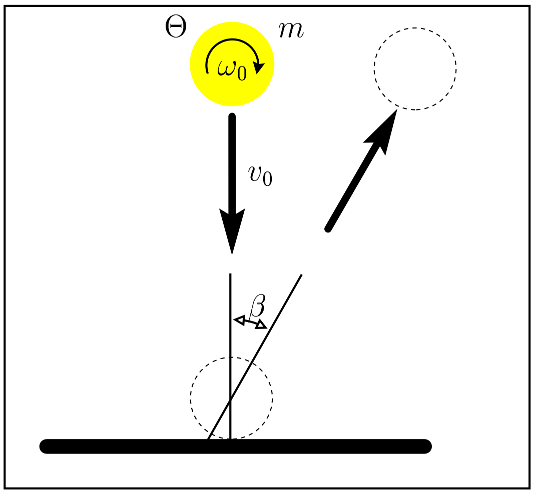
$$V_2(r_0) \approx -\alpha\gamma m\rho 2\pi \frac{a^3}{r_0} e^{-\frac{r_0 - R}{a}} (\frac{R}{a} - 1) \approx -\alpha\gamma m M \frac{3}{2} (\frac{a}{R})^2 e^{-\frac{r_0 - R}{a}} \frac{1}{r_0} \ .$$

Die Kräfte ergeben sich zu $F_1 = -\gamma m M \frac{1}{r_0^2}$ und

$$F_2 = -\alpha\gamma m M \frac{3}{2} (\frac{a}{R})^2 \{\frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{ar_0}\} e^{-\frac{r_0 - R}{a}} \approx -\alpha\gamma m M \frac{3}{2} \frac{a}{R} \frac{1}{r_0 R} e^{-\frac{r_0 - R}{a}} \ .$$

Damit erhält man das Verhältnis der Kräfte auf der Erdoberfläche ($r_0 = R$) zu $\frac{F_2}{F_1} = \frac{3}{2}\alpha\frac{a}{R}$. Bei einem Erdumfang von ungefähr 40Mm, einem a von 100m und einem α von 10^{-2} erhält man $\frac{F_2}{F_1} = \frac{3\pi}{40}10^{-6} \approx \frac{1}{4}10^{-6}$.

Aufgabe 4) Eine mit der Kreisfrequenz ω_0 rotierende Kugel (Masse m, Trägheitsmoment Θ und Radius R) trifft mit der Geschwindigkeit v_0 senkrecht auf eine Wand. Man nehme an, daß die Kugel im Moment des Auftreffens so schnell durch Reibung in Bewegung gesetzt wird, daß sie beim Verlassen der Oberfläche nicht mehr durchrutscht, sondern entlang der Oberfläche rollt. Mit welchem Reflexionswinkel β wird die Kugel reflektiert und wie viel Energie ΔE wurde beim Stoßprozeß verbraucht? Berechnen Sie β und ΔE auch für die Spezialfälle der Hohlkugel und der Vollkugel.



Da alle Reibungskräfte parallel zur Wand auftreten, gilt senkrecht zur Wand die Impulserhaltung. Der Impuls in diese Richtung wird daher elastisch reflektiert, und man erhält $v_0 = v_\perp$, wobei $v_\perp$ die zur Wand senkrechte Komponente der Geschwindigkeit nach dem Stoß ist. Es ist günstig, die Drehimpulsbilanz um den Punkt P zu bilden, an dem der Ball auftrifft. Die Reibungskräfte wirken an der Oberfläche parallel zur Wand. Daher wirkt kein Drehmoment um den Punkt P; der Drehimpuls um P ist also erhalten. Direkt bevor die Kugel die Oberfläche verläßt, ist die Geschwindigkeit der Kugel parallel zur Wand wegen der Abrollbedingung gegeben durch $v_\parallel = R\omega$ und die Drehimpuls Erhaltung fordert $\Theta\omega_0 = mRv_\parallel + \Theta\omega = (\Theta + mR^2)\omega$. Der Reflexionswinkel ist durch das Verhältnis der Geschwindigkeiten gegeben

$$\tan\beta = \frac{v_\parallel}{v_\perp} = \frac{R\omega_0}{v_0}\frac{\Theta}{\Theta + mR^2} \ .$$

Die Energie ΔE, die durch Reibung verbraucht wurde, erhält man durch

$$\Delta E = \frac{1}{2}(mv_0^2 + \Theta\omega_0^2) - \frac{1}{2}(mv_\perp^2 + (\Theta + mR^2)\omega^2) = \frac{1}{2}(\Theta\omega_0^2 - \frac{\Theta^2}{\Theta + mR^2})\omega_0^2 = \frac{1}{2}\frac{\Theta mR^2}{\Theta + mR^2}\omega_0^2 \ .$$

Damit erhält man für die Hohlkugel den Reflexionswinkel $\beta_\circ = \arctan(\frac{R\omega_0}{v_0}\frac{2}{5})$ und $\Delta E_\circ = \frac{1}{5}mR^2\omega_0^2$. Für die Vollkugel folgt $\beta_\bullet = \arctan(\frac{R\omega_0}{v_0}\frac{2}{7})$ und $\Delta E_\bullet = \frac{1}{7}mR^2\omega_0^2$.

Aufgabe 5) Betrachten Sie einen im Schwerefeld gekippten Torus, auf dessen Oberfläche sich ein Massenpunkt der Masse m bewegt. Der Torus sei um den Winkel Ψ aus der Horizontalen gekippt. Der Radius des Rings sei R und der Radius der Röhre ist r.

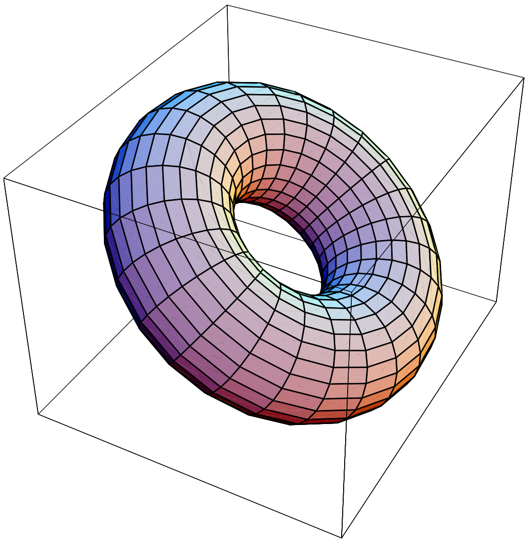
a) Machen Sie eine Skizze Ihrer Koordinatenwahl, und bestimmen Sie die Lagrangefunktion für den Massenpunkt.

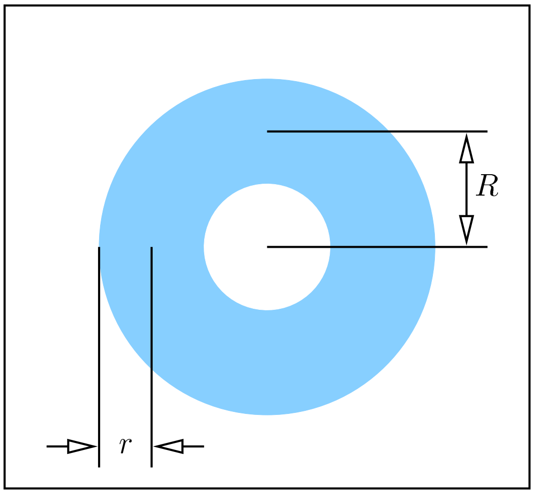
b) Geben Sie die zu den von Ihnen gewählten Koordinaten kanonisch konjugierten Impulse an.

c) Wie lautet die Hamiltonfunktion?

d) Stellen Sie die kanonischen Bewegungsgleichungen für den Massenpunkt auf.

e) Linearisieren Sie die Bewegungsgleichungen und berechnen Sie daraus die Schwingungsfrequenzen für kleine Schwingungen.





a) Die Wahl der Koordinaten ϕ und θ:

ϕ: In den Torus sei ein kartesisches Koordinatensystem gelegt. Der Ursprung liege in der Mitte des Toruses, die z–Achse sei parallel zur Symmetrieachse und zeigt schräg nach oben. Die y–Achse sei horizontal, derart daß die x–Achse schräg nach unten zeigt. Der Polarwinkel $\arctan(\frac{y}{x})$ wird mit ϕ bezeichnet.

θ: Die Schnittkurve des Toruses mit der Halbebene $\phi = const$ ist ein Kreis. Dieser Kreis wird mit θ parametrisiert, derart daß ein Punkt mit $\theta = 0$ auf der Außenseite des Toruses in der x-y Ebene liegt. Punkte mit $\theta \in (0, \pi)$ haben negative z Koordinaten.

Liegt der Torus horizontal, so ist ein Punkt auf dem Torus in der x–z Ebene gegeben durch $\vec{r}_1 = (R + r\cos\theta)\vec{e}_x - r\sin\theta\vec{e}_z$. Den Vektor zu einem anderen Punkt auf dem horizontal liegenden Torus findet man durch Rotation von $\vec{r}_1$ um die z–Achse um den Winkel ϕ. Man erhält

$$\vec{r}_2 = (R+r\cos\theta)(\cos\phi\vec{e}_x + \sin\phi\vec{e}_y) - r\sin\theta\vec{e}_z = (R+r\cos\theta)\cos\phi\vec{e}_x + (R+r\cos\theta)\sin\phi\vec{e}_y - r\sin\theta\vec{e}_z \, .$$

Hieraus kann man die Punkte auf dem gekippten Torus berechnen, indem man um den Winkel Ψ um die y–Achse dreht. Man erhält

$$\vec{r} \;=\; (R + r\cos\theta)\cos\phi(\cos\Psi\vec{e}_x - \sin\Psi\vec{e}_z) + (R + r\cos\theta)\sin\phi\vec{e}_y - r\sin\theta(\cos\Psi\vec{e}_z + \sin\Psi\vec{e}_x)$$

$$= \begin{pmatrix} (R + r\cos\theta)\cos\phi\cos\Psi - r\sin\theta\sin\Psi \\ (R + r\cos\theta)\sin\phi \\ -(R + r\cos\theta)\cos\phi\sin\Psi - r\sin\theta\cos\Psi \end{pmatrix} .$$

Die Lagrangefunktion ergibt sich aus $L = T - V$ zu

$$L = \frac{1}{2}m\{(R + r\cos\theta)^2\dot{\phi}^2 + r^2\dot{\theta}^2\} + mg[(R + r\cos\theta)\cos\phi\sin\Psi + r\sin\theta\cos\Psi] .$$

b) Die kanonischen Impulse lauten dann

$$p_\phi = \partial_{\dot{\phi}}L = m(R + r\cos\theta)^2\dot{\phi} , \quad p_\theta = \partial_{\dot{\theta}}L = mr^2\dot{\phi} .$$

c) Die Hamiltonfunktion ergibt sich mit $H = \sum_i p_i\dot{q}_i - L$ zu

$$H = \frac{p_\phi^2}{2m(R + r\cos\theta)^2} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - mg[(R + r\cos\theta)\cos\phi\sin\Psi + r\sin\theta\cos\Psi] .$$

d) Die kanonischen Gleichungen lauten dann

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \partial_{p_\phi}H = \frac{p_\phi}{m(R + r\cos\theta)^2} \\ \dot{\theta} &= \partial_{p_\theta}H = \frac{p_\theta}{mr^2} \\ \dot{p}_\phi &= -\partial_\phi H = -mg(R + r\cos\theta)\sin\phi\sin\Psi \\ \dot{p}_\theta &= -\partial_\theta H = -2r\sin\theta\frac{p_\phi^2}{2m(R + r\cos\theta)^3} - mg(r\sin\theta\cos\phi\sin\Psi - r\cos\theta\cos\Psi) . \end{aligned}$$

e) Das stabile Gleichgewicht liegt bei $\phi = 0, \theta = \frac{\pi}{2} - \Psi$ und das instabile Gleichgewicht bei $\phi = 0, \theta = -\frac{\pi}{2} - \Psi$. Bei der Linearisierung werden nichtlineare Terme in ϕ, $\dot{\phi}$, $\alpha = \theta + \Psi - \frac{\pi}{2}$ und $\dot{\theta}$ vernachlässigt. Man erhält

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &\approx -\frac{\dot{p}_\phi}{m(R + r\sin\Psi)^2} = -\frac{g\sin\Psi}{R + r\sin\Psi}\phi \\ \ddot{\theta} &= -\frac{\dot{p}_\theta}{mr^2} = \frac{g}{r}\cos(\theta + \Psi) = -\frac{g}{r}\sin(\theta + \Psi - \frac{\pi}{2}) = -\frac{g}{r}\sin(\alpha) . \end{aligned}$$

Hier lassen sich die linearisierten Schwingungsfrequenzen ablesen, sie sind

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g\sin\Psi}{R + r\sin\Psi}} , \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{r}} .$$