Übungen zur theoretischen Elektrodynamik (Rose/Hoffstätter)

7.7.1998, Lösungen zu dem Übungsblatt Nr. 10

Aufgabe 1) Die Energiedichte des Magnetfeldes beträgt $w_m = \int \vec{H} d\vec{B}$. Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß die Magnetisierungskurve bis zur Sättigung durch $\vec{B} = \mu\vec{H}$ gegeben ist. Dann, aber nur dann, ist die Energiedichte gleich $w_m = \frac{1}{2}\vec{H}\vec{B}$. Die gesamte Feldenergie ergibt sich durch Volumenintegration

$$W = \int w(\vec{r}) d^3\vec{r} = \frac{1}{2}\int B(\vec{r})H(\vec{r})d^3\vec{r}.$$

a) Kurz vor der Sättigung ergibt sich also $2W = \hat{B}\hat{H}V$, wobei V das Volumen des Eisens ist.

b) $2W = B_{Eisen}H_{Eisen}(V - Ad) + B_{Spalt}H_{Spalt}Ad$, mit der Querschnittsfläche A des Eisenkerns. Da $\vec{B}$ senkrecht auf der Grundfläche des Luftspalt steht, geht es stetig über, $B_{Eisen} = B_{Spalt} = \hat{B}$ bzw. $H_{Spalt} = \frac{B_{Spalt}}{\mu_0} = \frac{\hat{B}}{\mu_0}$. Damit ergibt sich

$$2W = \hat{B}\hat{H}V + Ad\hat{B}(\frac{\hat{B}}{\mu_0} - \hat{H}) \ . \tag{1}$$

Da μ_{Eisen} die Steigung der Kurve $B(H)$ in der Nähe von $B = 0$ angibt, ist $\hat{H}$ von der Größenordnung $\frac{\hat{B}}{\mu_{Eisen}}$.$\hat{H}$ ist also sehr viel kleiner als $\frac{\hat{B}}{\mu_0}$, denn $\frac{\mu_{Eisen}}{\mu_0} > 100$. Damit wird die Klammer in (1) positiv, und die gespeicherte Energie ist im Fall b) größer als in Fall a). Im Fall b) ergibt sich für das Verhältnis der Energie im Eisen und im Spalt

$$\frac{W_{Eisen}}{W_{Spalt}} = \frac{\hat{H}(V - Ad)\mu_0}{Ad\hat{B}} \approx \frac{\mu_o}{\mu}(\frac{V}{Ad} - 1) \ .$$

Erst wenn das Verhältnis der Spaltbreite Zur Länge des Eisenkreises etwa 1 : 100 wird, wird die im Eisen gespeicherte Energie so groß wie die im Spalt gespeicherte!

Aufgabe 2) Die Selbstinduktion L und die Kapazität C des Kabels werden über die magnetische und die elektische Feldenergie berechnet

$$L = \frac{2\dot{W}^{ges}_{magn}}{I^2} \ , \quad C = \frac{2W^{ges}_{elektr}}{U^2} \ .$$

Im elektrostatischen Fall, wenn eine Spannung U zwischen Innen- und Außenleiter liegt, gilt

$$\varphi = U\frac{\ln \rho/a}{\ln b/a} \ , \quad \vec{E} = -\frac{U}{\ln b/a}\frac{\vec{e}_\rho}{\rho} \ ,$$

$$w_{elektr} = \frac{\epsilon}{2}E^2 = \frac{\epsilon/2U^2}{(\ln b/a)^2}\frac{1}{\rho^2} \ .$$

$$\begin{aligned} W_{elektr} &= \int w_{elektr} dV \ , \text{ mit } dV = 2\pi\rho d\rho l \\ &= \int_a^b \frac{\epsilon/2U^2}{(\ln b/a)^2}\frac{l}{\rho^2}2\pi\rho d\rho = \pi\epsilon\frac{U^2 l}{\ln b/a}. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich für die Kapazität pro Längeneinheit $\frac{C}{l} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln b/a}$.
Bei zeitlich konstantem Stromfluß I erhält man

$$\begin{array}{llll} \text{für} & \rho < a: & \vec{H}_i & = \frac{I\rho}{2\pi a^2}\vec{e}_\varphi \ , \\ \text{für} & a < \rho < b: & \vec{H}_a & = \frac{I}{2\pi\rho}\vec{e}_\varphi \ , \\ \text{für} & b < \rho \ : & \vec{H} & = 0 \ . \end{array}$$

Dann ist $w_{innen} = \frac{\mu}{2}\frac{I^2\rho^2}{4\pi^2a^4}$ und $w_{außen} = \frac{\mu}{2}\frac{I^2}{4\pi^2\rho^2}$. Damit erhält man

$$W_{magn} = \int_{\rho=0}^a w_{innen}dV + \int_{\rho=a}^b w_{außen}dV = \frac{\mu}{2}\frac{I^2}{4\pi^2}2\pi l(\int_0^a \frac{\rho^3 d\rho}{a^4} + \int_a^b \frac{d\rho}{\rho}) = \frac{\mu I^2}{4\pi}l(\frac{1}{4} + \ln\frac{a}{b}).$$

Dann ergibt sich für die Selbstinduktion pro Längeneinheit $\frac{L}{l} = \frac{\mu}{2\pi}(\frac{1}{4} + \ln\frac{a}{b})$.
Für den Fall, daß auch der Innenleiter ein unendlich dünnwandiges Rohr ist, also $\vec{H}_i = 0$ ist, ergibt sich $\frac{L}{l} = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{a}{b}$. Der Wellenwiederstand ergibt sich für diesen Fall zu

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\ln b/a}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

und $\frac{LC}{l^2} = \epsilon\mu$.