Übungen zur theoretischen Elektrodynamik (Rose/Hoffstätter)

21.4.1997, Lösungen zu dem Übungsblatt Nr. 1

Aufgabe 1) Für das Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{K}{r^5}(3\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{\mu}) - r^2\vec{\mu})$$

ist die Ladung in einer Kugel von Radius a gegeben durch

$$Q = \varepsilon_0 \oint \vec{E} d\vec{f}$$

für die Integration von $\vec{r}\cdot\vec{\mu}$ über eine Kugel ergibt sich $\oint \vec{r}\cdot\vec{\mu} d\vec{f} = 0$, da auf der Kugeloberfläche $\vec{r}$ ebensooft parallel zu $\vec{\mu}$ wie antiparallel ist. Es ergibt sich also $Q = 0$. Beschrieben werden kann durch $\vec{E}$ also nur ein Feld ohne Monopolanteil, es ist ein Dipolfeld. Dies wird durch eine Ladung $\frac{\mu}{2d}$ bei $\frac{\vec{\mu}d}{\mu}$ und eine Ladung $-\frac{\mu}{2d}$ bei $-\frac{\vec{\mu}d}{\mu}$ erzeugt, wenn d gegen 0 geht:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= K \lim_{d\to 0}\left(\frac{\frac{\mu}{2d}(\vec{r} - \frac{\vec{\mu}d}{\mu})}{[(\vec{r} - \frac{\vec{\mu}d}{\mu})^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\frac{\mu}{2d}(\vec{r} + \frac{\vec{\mu}d}{\mu})}{[(\vec{r} + \frac{\vec{\mu}d}{\mu})^2]^{\frac{3}{2}}}\right) \\
&= K \lim_{d\to 0}\left(\frac{\frac{\mu}{2d}(\vec{r} - \frac{\vec{\mu}d}{\mu})}{r^3(1 - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{\mu}d}{\mu r^2})^{\frac{3}{2}}} - \frac{\frac{\mu}{2d}(\vec{r} + \frac{\vec{\mu}d}{\mu})}{r^3(1 + 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{\mu}d}{\mu r^2})^{\frac{3}{2}}}\right) \\
&= \frac{K}{r^5}(3\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{\mu}) - r^2\vec{\mu}) \ .
\end{aligned}$$

Aufgabe 2)

a) Im Gleichgewicht wird die Gesamtenergie $W = W_p + W_\sigma$ minimal, wobei $-W_p = \int p\, dV$ die durch Expansion geleistete Arbeit ist und $W_\sigma = 2\cdot 4\pi r^2\sigma$ die Arbeit beschreibt, die gegen die Oberflächenspannung aufgewendet werden mußte, um die Oberfläche zu erzeugen,

$$\left.\frac{dW}{dr}\right|_{r_0} = 16\pi\sigma r_0 - p(r_0)\left.\frac{dV}{dr}\right|_{r_0} = 0 \to p(r_0) = \frac{4\sigma}{r_0} = 3.33\frac{N}{m^2} \ .$$

b) Zusätzlich berücksichtigt man bei einer geladenen Seifenblase die Arbeit $W_c = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$, die aufgewendet werden muß, um die Elektrische Ladung auf den Radius r zu bringen. Man erhält nun eine quadratische Gleichung als Gleichgewichtsbedingung

$$-\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2} + 16\pi\sigma r - 4\pi p(r) r^2 = 0 \ .$$

Das Gasgesetz liefert für eine isotherme Ausdehnung die Konstante $p(r)V(r)$. Es folgt demnach für den Druck als Funktion des Radiuses $p(r) = p(r_0)\frac{r_0^3}{r^3}$. Die Lösung r der kubischen Gleichung

$$r^3 - r_0^2 r - \frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0 16\sigma} = 0$$

ist der gesuchte Radius. Er ergibt sich mit MATHEMATICA zu $r = 5,2515\text{km}$.