Übungen zur theoretischen Elektrodynamik (Rose/Hoffstätter)

28.4.1998, Lösungen zu dem Übungsblatt Nr. 2

Aufgabe 1) Eine nichtleitende Kugel trägt auf ihrer Oberfläche die Gesamtladung Q und befindet sich in einem homogenen Magnetfeld. Wie verlaufen die Linien der Energieströmung und wie groß ist der Betrag des Poyntingschen Vektors $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$? Welchen mechanischen Drehimpuls erhält die Kugel beim Abschalten des Magnetfeldes? Es gilt:

$$\vec{H} = H_0 \vec{e}_z \ , \quad \vec{E} = \frac{Q\vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \ , \quad \vec{e}_r \times \vec{e}_z = -\vec{e}_\varphi \sin\vartheta \ , \quad \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = -\frac{QH_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sin\vartheta}{r^2}\vec{e}_\varphi \ .$$

Die Energieströmung $\vec{S}$ verläuft kreisförmig. Beim Abschalten von $\vec{H}$ bewirkt $\dot{\vec{H}}$ ein elektrisches Feld $\vec{E}_1$ gemäß

$$\oint\limits_{\text{Rand}} \vec{E}_1 d\vec{s} = -\int\limits_{\text{Fläche}} \mu_0 \dot{\vec{H}} d\vec{f} \ , \quad \dot{\vec{H}} = \vec{e}_z \dot{H} \ .$$

Somit erhält man

$$E_\varphi 2\pi\rho = -\mu_0 \dot{H} \pi \rho^2 \text{ mit } \vec{E}_1 = E_\varphi \vec{e}_\varphi \ .$$

Dieses elektrische Feld übt auf die Ladung Kräfte tangential zur Kugeloberfläche aus. Auf die Kugel wirkt also ein Drehmoment $\vec{M}$. Das Drehmoment führt zu einem Drehimpuls

$$\vec{L} = \int \vec{M} dt \ , \quad d\vec{M} = \rho\vec{e}_\rho \times dQ E_\varphi \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z \rho dQ E_\varphi = -\frac{\mu_0}{2}\rho^2 \dot{H} dQ \vec{e}_z \ .$$

Das ringförmige Ladungselement

$$dQ = \frac{Q}{4\pi r_0^2} r_0^2 \sin\vartheta d\vartheta d\phi \ .$$

Man erhält somit für $\vec{M}$

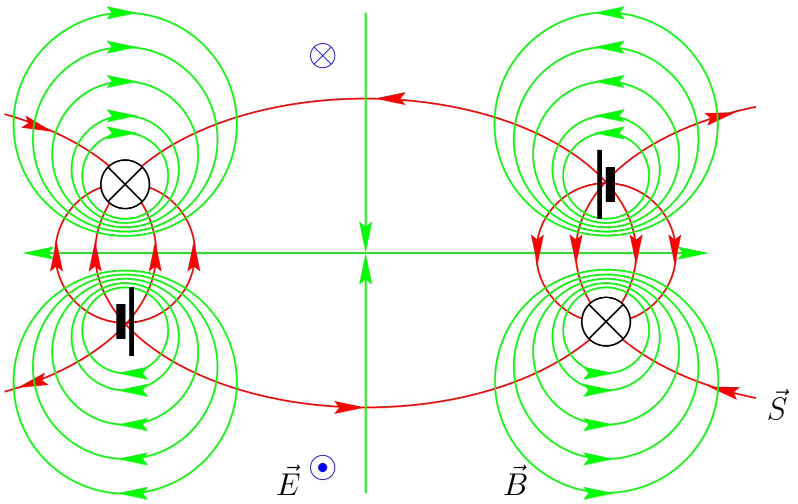
$$\vec{M} = \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \int\limits_{\phi=0}^{2\pi} d\vec{M} = -\vec{e}_z \frac{\mu_0 \dot{H} Q r_0^2}{4} \int\limits_0^{\pi} \sin^3\vartheta d\vartheta = -\vec{e}_z \frac{\mu_0 \dot{H} Q r_0^2}{4} \int\limits_{-1}^{1} (1-x^2) dx = -\frac{1}{3}\vec{e}_z \mu_0 \dot{H} Q r_0^2 \ .$$

Am Anfang ist $H = H_0$, am Ende des Abschaltvorgangs $H(t) = 0$; also wird der Drehimpuls

$$\vec{L} = \int\limits_{t_0}^{t} \vec{M} dt = -\frac{1}{3}\vec{e}_z \mu_0 Q r_0^2 \int\limits_{t_0}^{t} \dot{H} dt = -\frac{1}{3}\vec{e}_z \mu_0 Q r_0^2 [H(t) - H_0] = \frac{1}{3}\vec{e}_z \mu_0 Q r_0^2 H_0 \ .$$

Aufgabe 2)

a) Auf der Ebene der Batterien und Lampen steht das elektrische Feld aus Symmetriegründen senkrecht. Wobei es zwischen oberer und unterer Halbebene das Vorzeichen wechselt. Wenn man die Eigenausdehnung der Batterien und Lampen vernachlässigt, ist das Magnetfeld rotationsinvariant bezüglich der z-Achse. Die Magnetfeldlinien liegen daher in dieser Ebene, so daß auch die $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$-Linien in dieser Ebene bleiben.



b) Das elektrische Feld bleibt in der Ebene der oberen Leiterschleife im wesentlichen in dieser Ebene. Das Magnetfeld ist in der Nähe des Drahtes praktisch senkrecht auf dieser Ebene. Wobei zwischen dem Inneren der Schleife und dem Außenbereich ein Vorzeichenwechsel stattfindet.