Übungen zur theoretischen Elektrodynamik (Rose/Hoffstätter)

5.5.1997, Lösungen zu dem Übungsblatt Nr. 3

Aufgabe 1) Für stationäre Felder ist $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ und $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$. Somit folgt aus den Maxwellschen Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \vec{H} = \vec{j} \text{ und } \vec{j}^{\text{innen}} = \sigma \vec{E}^{\text{innen}} \Rightarrow \nabla \vec{j} &= 0 \;, \\
\nabla \times \vec{E} &= 0 \;, \\
\nabla \vec{B} = \mu \nabla \vec{H} = 0 \Rightarrow \nabla \vec{H} &= 0 \;.
\end{aligned}
$$

- Betrachtung von $\vec{E}$: Da die Felder aus Symmetriegründen nicht von φ und z sondern nur von ϱ abhhängen können, kann man statt ∂_ϱ auch $\frac{d}{d\varrho}$ schreiben,

  $$\nabla \times \vec{E} = \vec{e}_z \left(\frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho}[\varrho E_\varphi]\right) - \vec{e}_\varphi \frac{dE_z}{d\varrho} = 0 \;.$$

  Aus $\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}(\varrho E_\varphi) = 0$ ergibt sich $\varrho E_\varphi = const. = A$, $E_\varphi = \frac{A}{\varrho}$. Die Forderung, daß j_φ (und somit auchE_φ) in der Drahtachse endlich bleiben muß, liefert $A = 0$ und damit $E_\varphi = 0$, $j_\varphi = 0$. Die Transversalkomponente E_φ an der Oberfläche ist stetig und daher verschwindet E_φ auch im Bereich außerhalb des Drahtes.

  Da $\frac{dE_z}{d\varrho} = 0$ sein muß, ist $E_z = \frac{j_z}{\sigma} = const.$ im Inneren des Drahtes. Außerdem gilt auf Grund der Stetigkeitsbedingung der Transversalkomponenten von $\vec{E}$ auf dem Rand, daß $E_z^{\text{außen}}(a) = E_z^{\text{innen}}(a)$. Im Außenbereich ist wegen $\sigma = 0$ auch $\vec{j}^{\text{außen}} = 0$.

  Aus $\nabla \vec{j} = \frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}[\varrho j_\varrho] = 0$ schließt man auf $j_\varrho = \frac{A'}{\varrho} = 0. \Rightarrow \vec{j} = j_z \vec{e}_z$. Folglich ist unabhänging vom Strom im Inneren des Drahtes $E_\varrho = 0$. Außen folgt analog aus $\nabla \vec{E} = 0$, daß $E_\varrho = \frac{A''}{\varrho}$. Ist keine Oberflächenladung vorhanden, wird außen $E_\varrho = 0$.

- Betrachtung von $\vec{H}$: Analog folgt auch aus $\nabla \vec{H} = \frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}[\varrho H_\varrho] = 0$, daß H_ϱ im gesamten Breich verschwindet, $\Rightarrow H_\varrho = 0$.

a) Im Inneren des Drahtes:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} = j e_z \Rightarrow \frac{dH_z}{d\varrho} = 0, H_z = const.$$

H_z ist konstant unabhänging vom Strom, wird daher nicht von ihm verursacht und ist genau wie $E_\varrho^{\text{außen}}$ für diese Aufgabe uninteressant, folglich setzen wir $H_z = 0$. Mit $\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}[\varrho H_\varrho] = \vec{j}$ folgt $H_\varphi^{\text{innen}} = \frac{1}{2}\varrho\vec{j} + \frac{A'''}{\varrho}$. H_φ^{innen} muß jedoch in der Drahtachse endlich bleiben, daher $A''' = 0$ und

$$H_\varphi^{\text{innen}} = \frac{1}{2}\vec{j}\,\varrho = \frac{1}{2a^2\pi}\varrho I \ .$$

b) Außerhalb des Drahtes:

$$\nabla \times \vec{H}^{\text{außen}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}[\varrho H_\varphi^{\text{außen}}] = 0 \ , \quad \varrho H_\varphi = C \ .$$

Mit der Stetigkeitsbedingung $H_\varphi^{\text{außen}}(a) = H_\varphi^{\text{innen}}(a)$ folgt und $C = \frac{1}{2}\vec{j}a^2$, $H_\varphi^{\text{außen}} = \frac{1}{2\varrho}\vec{j}a^2 = \frac{I}{2\pi\varrho}$. Insgesamt erhält man also

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma}\vec{e}_z \ , \quad \vec{H} = \frac{I}{2\pi}\left(\frac{\varrho}{a^2}\theta(a-\varrho) + \frac{1}{\varrho}\theta(\varrho - a)\right)\vec{e}_\varphi \ .$$

Aufgabe 2)

a) Im Laborsystem, in dem das Magnetfeld $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ herrscht bewegt sich das Voltmeter und der Metallstreifen. In einem Inertialsystem, das sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt, ruhten sowohl das Voltmeter als auch der Metallstreifen. Allerdings muß man die elektromagnetischen Felder $\vec{B}'$ und $\vec{E}'$ in diesem Inertialsystem follgendermaßen berechnen:

$$\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B} \ , \quad \vec{B}' = \vec{v} \times \vec{E} + \vec{B} = \vec{B} \ ,$$

wobei $\gamma \approx 1$ verwendet wurde. Das Voltmeter wird also die Spannung vB_0a.

b) Im Laborsystem ist nun das Voltmeter in Ruhe. Im Gleichgewichtszustand herrschen keine resultierenden Kräfte. Die Elektronen werden sich also so lange verschieben, bis das dadurch entstehende elektrische Feld die Kraftwirkung der Lorentzkraft kompensiert, $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0$. Das Voltmeter mißt also ebenfalls die Spannung vB_0a.