Übungen zur theoretischen Elektrodynamik (Rose/Hoffstätter)

12.5.1997, Lösungen zu dem Übungsblatt Nr. 4

Aufgabe 1) Die durch die Aufgabe vorgegebenen Randbedingungen sind folgende:

1. Stationäres Feld: $\partial_t \to 0$
2. Rotationssymmetrie: $\partial_\varphi \to 0$
3. Keine z Komponente des Magnetfeldes: $H_z = 0$
4. Die E_z Komponente des E Feldes ist nicht z abhängig: $\partial_z E_z = 0$

Bestimmung des elektrischen Feldes: Im Folgenden zeichnen wir die Gebiete im Innern mit 1, im Zwischenraum mit 2 und im Außenraum mit 3 aus. Die Felder in diesen Räumen werden durch hochgestellte Indizes gekennzeichnet. Da im Leiterinnern und im Vakuum keine freien Ladungen auftreten, gilt $\nabla\vec{E} = 0$. Aufgrund der Symmetrie des Problems werden Zylinderkoordinaten gewählt und die Divergenz entsprechend geschrieben als $\nabla\vec{E} = \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho(\varrho E_\varrho) + \frac{1}{\varrho}\partial_\varphi E_\varphi + \partial_z E_z$. Die φ und ϱ Anteile der Divergenz sind wegen 2) und 4) Null,

$$\nabla\vec{E} = \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho[\varrho E_\varrho(\varrho, z)] = 0 \ .$$

Die allgemeinste mögliche Ansatzfunktion lautet $E_\varrho^{(i)} = \frac{A^{(i)}(z)}{\varrho}$. Mit der Bedingung, daß $E_\varrho^{(1)}$ im Draht nicht divergiert, muß dort gelten $E_\varrho^{(1)} = 0$. Als weitere Bestimmungsgleichung wird $\nabla \times \vec{E} = 0$ benötigt! Aus

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{e_z}\frac{1}{\varrho}\partial_\varrho(\varrho E_\varphi) - \vec{e_\varrho}\partial_z E_\varphi + \vec{e_\varphi}(\partial_z E_\varrho - \partial_\varrho E_z) = 0$$

ergibt sich $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial(\varrho E_\varphi)}{\partial\varrho} = 0$ und daher $E_\varphi^{(i)} = \frac{B(z)}{\varrho}$. Die Endlichkeitsanforderung im Drahtinnern verlangt $E_\varphi^{(1)} = 0$. Da die Tangentialkomponenten des E-Feldes stetig sein müssen, gilt $E_\varphi = 0$ im ganzen Raum. Die φ Komponente der Rotation liefert die nächste Bestimmungsgleichung $A'^i(z) - \varrho\partial_\varrho E_z^{(i)}(\varrho) = 0$. Man findet eine Lösung für die Gleichung nur für den Fall, daß beide Glieder konstant sind, $A'^i(z) = \varrho\partial_\varrho E_z^{(i)}(\varrho) = \alpha$. Integration liefert

$$A^{(i)}(z) = \alpha^{(i)}z + \beta^{(i)} \qquad E_\varrho^{(i)} = \frac{\alpha^{(i)}z + \beta^{(i)}}{\varrho} \qquad E_z^{(i)} = \alpha^{(i)}\ln\varrho + \gamma^{(i)} \ .$$

Im Innern gilt $\alpha^{(1)} = \beta^{(1)} = 0$, da $E_\varrho^{(1)} = 0$. Hieraus begründet sich $E_z^{(1)} = const. = \frac{j}{\sigma}$ im Draht. Die Stromdichte im Rückleiter ist Null, da sich der Strom über eine unendliche Fläche verteilt. Daher ist dort $E_z^{(3)} = 0$ und somit $\alpha^{(3)} = 0$. Da für z=0 die Oberflächenladung verschwindet, gilt folgende Beziehung: $D_\varrho(b;0) = \epsilon E_\varrho(b;0) = 0$. Diese Bedingung ergibt $\beta^{(2)} = \beta^{(3)} = 0$. Aus der Stetigkeit der Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes folgt die Stetigkeit von E_z. An den Grenzflächen ergibt sich im Zwischenraum:

$$\begin{aligned}
E_z^{(2)}(b) &= \alpha^{(2)} \ln b + \gamma^{(2)} = \frac{j}{\sigma} \ , \quad E_z^{(2)}(a) = \alpha^{(2)} \ln a + \gamma^{(2)} = 0 \ , \\
\alpha^{(2)} &= -\frac{j}{\sigma \ln \frac{a}{b}} \ , \quad \gamma^{(2)} = \frac{j}{\sigma} \frac{\ln a}{\ln \frac{a}{b}} \ , \\
E_z^{(2)} &= \frac{j}{\sigma} \frac{\ln \frac{a}{\varrho}}{\ln \frac{a}{b}} \ , \quad E_\varrho^{(2)} = -\frac{j}{\sigma \ln \frac{a}{b}} \frac{z}{\varrho} \ .
\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man also folgendes elektrisches Feld:

$$\vec{E} = \frac{j}{\sigma}[\Theta(b-\rho)\vec{e}_z + \{\Theta(\rho-b) - \Theta(a-\rho)\}\frac{1}{\ln \frac{a}{b}}(\ln \frac{a}{\rho}\vec{e}_z - \frac{z}{\rho}\vec{e}_\rho)] \ .$$

Die Feldlinien in der $\varrho - z$ Ebene berechnen sich zu

$$\frac{dz}{d\varrho} = \frac{E_z}{E_\varrho} = -\frac{\varrho}{z} \ln \frac{a}{\varrho} \ , \quad z^2 + \varrho^2(\ln \frac{a}{\varrho} + \frac{1}{2}) = C \ .$$

Die letzte Gleichung ergibt sich durch Integration nach Trennung der Variablen! Es gibt einen Bereichin dem die Feldlinien den Rückleiter nicht erreichen und zum Draht zurückkehren, und den einen, in dem die Feldlinien vom Draht zum Rückleiter verlaufen. Dazwischen liegt eine Grenzkurve, die durch $\varrho = a$; $z = 0$ geht. Für die Umgebung dieses Punktes kann man schreiben

$$\ln \frac{a}{\varrho} = \ln \frac{1}{1 - \frac{a-\varrho}{a}} \approx \frac{a-\varrho}{a} \ \frac{dz}{d\varrho} = -\frac{a-\varrho}{z} \ .$$

Nach Integration erhält man: $z^2 - (a-\varrho)^2 = 0$; $z = \pm(a-\varrho)$. Diese Feldlinie hat am Punkt $\varrho = a$; $z = 0$ einen Knick!

Bestimmung des magnetischen Feldes: Für das B–Feld gilt $\nabla \vec{B} = \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho(\varrho B_\varrho) = 0$. Die restlichen Terme der Divergenz fallen wegen 2) und 3) weg. Der Lösungsansatz für die Differentialgleichung lautet $B_\varrho = \frac{C(z)}{\varrho}$. Um die Endlichkeit des B–Feldes zu garantieren, muß $B_\varrho^{(1)} = 0$ sein. Die Stetigkeit der Normalkomponenten des B–Feldes verlangt dies für den gesamten Raum. Als weitere Bestimmungsgleichung wird $\nabla \times \vec{H} = 0$ verwendet! Es gilt

$$\nabla \times \vec{H}^{(1)} = \vec{e_z}\frac{1}{\varrho}\partial_\varrho(\varrho H_\varphi^{(1)}) - \vec{e_\varrho}\partial_z H_\varphi^{(1)} + \vec{e_\varphi}(\partial_z H_\varrho^{(1)} - \partial_\varrho H_z^{(1)}) = j\vec{e_z}$$

im Draht, bzw. $\nabla \times \vec{H}^{(i)} = 0\ ,\quad i \in \{2,3\}$ außerhalb. Damit erhält man $\partial_z H_\varphi = 0$, wegen 2) hängt H_φ nur von ϱ ab. Innerhalb des Drahtes gilt

$$\frac{1}{\varrho}\partial_\varrho(\varrho H_\varphi^{(1)}) = j \text{ und außerhalb gilt } \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho(\varrho H_\varphi^{(i)}) = 0\ ,\quad i \in \{2,3\}\ .$$

Wenn die Stetigkeit von H_φ an der Grenzfläche $\varrho = b$ zur Bestimmung der Konstanten herangezogen wird, ergeben sich als Lösungen für H_φ innerhalb und außerhalb des Drahtes:

$$H_\varphi^{(1)} = \frac{1}{2}j\ ,\quad \varrho \qquad H_\varphi^{(i)} = \frac{C}{\varrho} = \frac{1}{2}j\frac{b^2}{\varrho}\ ,\quad i \in \{2,3\}\ .$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\vec{H} = \frac{1}{2}j[\rho\Theta(b-\rho) + \frac{b^2}{\rho}\Theta(\rho - b)]\vec{e}_\varphi\ .$$

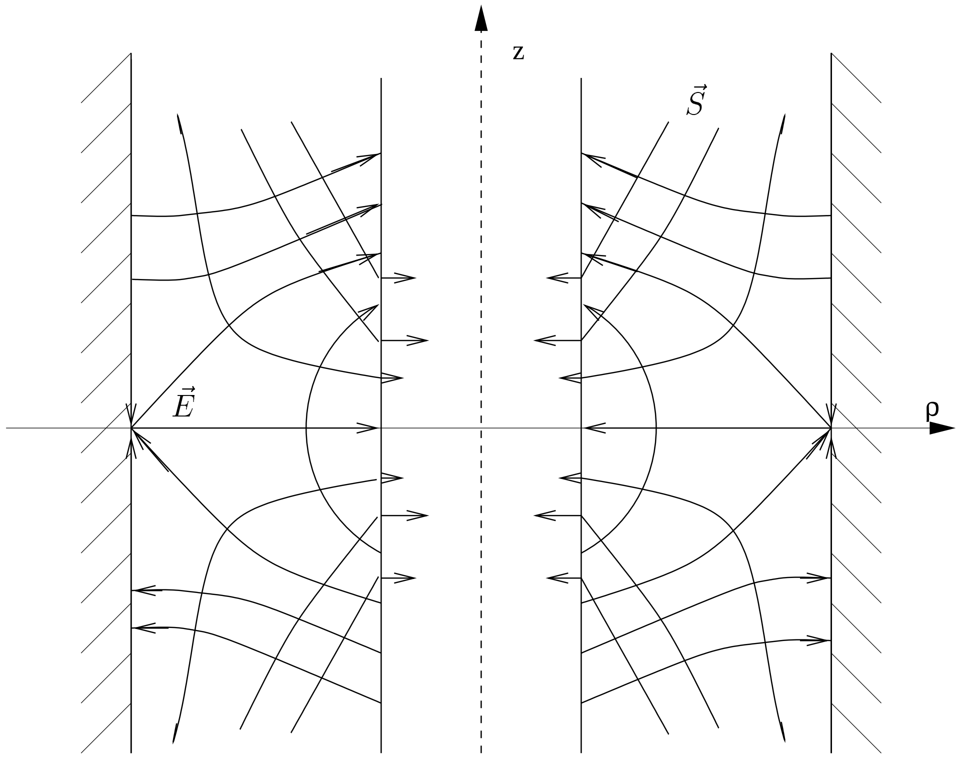
Berechnung des Poyntingvektors: Der Poyntingvektor ist das Kreuzprodukt aus E–Feld und H–Feld, $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$,

$$\vec{S}^{(1)} = -\frac{1}{2}\frac{j^2}{\sigma}\varrho\vec{e_\varrho}\ ,\quad \vec{S}^{(2)} = -\frac{1}{2}\frac{j^2}{\sigma}\left(\frac{\ln\frac{a}{\varrho}}{\ln\frac{a}{b}}\frac{b^2}{\varrho}\vec{e_\varrho} + \frac{b^2}{\ln\frac{a}{b}}\frac{z}{\varrho^2}\vec{e_z}\right)\ ,\quad \vec{S}^{(3)} = 0\ .$$

Die Energie strömt also von beiden Seiten aus dem Unendlichen durch den Zwischenraum zu jeder Stelle der Drahtoberfläche, um im Drahtinnern zu versickern. Zwischen z_1 und z_2 strömt die Leistung

$$\int \vec{S}d\vec{f} = -\frac{1}{2}\frac{j^2}{\sigma}b2\pi b\Delta z = -j^2\frac{\pi b^2\Delta z}{\sigma} = -j^2 R$$

in den Draht ein. Hierbei ist $R = \frac{\pi b^2 \Delta z}{\sigma}$ der Widerstand des Drahtes der Länge Δz. Dies entspricht genau der im Draht in Joule'sche Wärme überführten elektrischen Energie. Die Feldlinien von $\vec{S}$ sind, da sie auf $\vec{E}$ senkrecht stehen, identisch mit Äquipotentiallinien, denn $\vec{E} = -\nabla\Phi$.



Aufgabe 2) Um die resultierende Welle zu erhalten, überlagert man zwei ebene Wellen,

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{2}\left(e^{i(k_1x-\omega_1t)} + e^{i(k_2x-\omega_2t)}\right) \ .$$

Die Annahme unmittelbar benachbarter Frequenzen wird durch folgende Definitionen realisiert:

$$\begin{aligned} k_1 &= k - \frac{\Delta k}{2} \ , \quad k_2 = k + \frac{\Delta k}{2} \ , \quad \omega_1 = \omega - \frac{\Delta\omega}{2} \ , \quad \omega_2 = \omega + \frac{\Delta\omega}{2} \ , \\ \vec{E} &= \frac{\vec{E}_0}{2} e^{i(kx-\omega t)}\left(e^{-i(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t)} + e^{+i(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t)}\right) \ . \end{aligned}$$

Für den Realteil von $\vec{E}$ ergibt sich

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(kx-\omega t)\cos(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t) \ .$$

Der erste Term ist der schnell veränderliche Anteil, der zweite der langsam veränderliche. Mit der Phasengeschwindigkeit bewegt sich ein Punkt konstanter Phase, z.B. eine Nullstelle des schnell veränderlichen Faktors $\cos(kx-\omega t) = 0$ mit $kx - \omega t = \frac{\pi}{2}$, woraus folgt

$$kdx - \omega dt = 0 \ , \quad v_{Phase} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \ .$$

Mit der Gruppengeschwindigkeit bewegt sich die Einhüllende, d.h. der langsam veränderliche Faktor. So gilt für die Bewegung eines ,,Buckels" : $\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t = \pi$ bzw. auch hier: $\frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = v_{Gruppe}$. Für allgemeines ω als Funktion von k gilt

$$v_{Gruppe} = \frac{d\omega}{dk} \ .$$

Die Momentaufnahme von $|\vec{E}|/|\vec{E}_0|$ zum Zeitpunkt $t = 0$ sieht folgendermaßen aus: