Übungen zur theoretischen Elektrodynamik (Rose/Hoffstätter)

5.5.1998, Lösungen zu dem Übungsblatt Nr. 5

Aufgabe 1) Die Fouriertransformierte $F(k)$ gilt

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}e^{-ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{(x+i\sigma k)^2}{2\sigma}}e^{-\frac{\sigma k^2}{2}}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty+i\sigma k}^{\infty+i\sigma k} e^{-\frac{y^2}{2\sigma}}dy e^{-\frac{\sigma k^2}{2}}\,. \end{aligned}$$

Da die Integration über die Verbindungswege im Unendlichen verschwinden, folgt $\int_{-\infty+i\sigma k}^{\infty+i\sigma k} e^{-\frac{y^2}{2\sigma}}dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma}}dy$ und somit $F(k) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\sigma k^2}{2}}$. Nun erhält man mit $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma k^2}{2}}\frac{1}{2\pi}e^{ikx}dk$ aus $f(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma k^2}{2}}\frac{1}{2\pi}e^{i(kx-v_0t)}dk = f(x-v_0t)$.

Aufgabe 2) Der Ansatz der ebenen Wellen

$$\vec{E}_e = \vec{E}_0 e^{\mathrm{i}(k_1 z-\omega t)}\,, \vec{H}_e = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\frac{\vec{k}_1}{k_1}\times\vec{E}_0 e^{\mathrm{i}(k_1 z-\omega t)}\,, \tag{1}$$

$$\vec{E}_r = \vec{E}_R e^{\mathrm{i}(-k_1 z-\omega t)}\,, \vec{H}_r = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\frac{\vec{k}_1}{k_1}\times\vec{E}_R e^{\mathrm{i}(-k_1 z-\omega t)}\,, \tag{2}$$

$$\vec{E}_d = \vec{E}_D e^{\mathrm{i}(k_2 z-\omega t)}\,, \vec{H}_d = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\frac{\vec{k}_2}{k_2}\times\vec{E}_D e^{\mathrm{i}(k_2 z-\omega t)}\,. \tag{3}$$

Wegen des senkrechten Einfalls der ebenen Wellen besitzt das elektrische und das magnetische Feld nur Komponenten parallel zur Grenzfläche zwischen den beiden Medien. Deshalb folgt aus der Stetigkeitsbedingung von $\vec{E}_{tan}$ und $\vec{H}_{tan}$ des elektromagnetischen Feldes

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 + \vec{E}_R &= \vec{E}_D\,, \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\vec{E}_0 - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\vec{E}_R &= \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\vec{E}_D\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Elimination von $\vec{E}_D$ der Reflexionsgrad $R = \frac{\left|\vec{E}_R\right|^2}{\left|\vec{E}_0\right|^2} = \left(\frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}-\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}+\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}}\right)^2$.
Reflexonsfreien Übergang erhält man demnach für $\mu_1\varepsilon_2 = \mu_2\varepsilon_1$.
Für den Spezialfall $\mu_1 = \mu_2$ gilt $R = \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1}-\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2}}\right)^2$.