Übung 6 zur theoretischen Elektrodynamik (Rose/Hoffstätter)

2.6.1998, Lösung zu den Übungsblatt Nr. 6

Aufgabe 1) Man hat einen Drahtring in der Ebene $z = 0$. Es wird angenommen, daß die Ladung Q gleichmäßig über den Ring verteilt ist. Auf dem Kreisbogenelement ds sitzt dann die Ladung

$$dQ = \frac{Q}{2\pi a} ds \ .$$

Zum gesamt Potential in einem Punkt P auf der z-Achse trägt dQ den Anteil

$$d\varphi = \frac{dQ}{4\pi\epsilon\sqrt{a^2+z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Qds}{2\pi a\sqrt{a^2+z^2}}$$

bei. Das Gesamtpotential ergibt sich durch Summation über alle Kreisbogenelemente ,

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\int_K \frac{ds}{2\pi a\sqrt{a^2+z^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon\sqrt{a^2+z^2}} \ .$$

Für die elektrische Feldstärke erhält man

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z = \frac{Qz\vec{e}_z}{4\pi\epsilon(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \ .$$

Die Ladungsdichte eines Ringes bei z_0 ist $\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi a}\delta(z-z_0)\delta(\rho-a)$. Das Dipolmoment ist

$$m_z = \int \rho(\vec{r}) z d^3\vec{r} = \int \frac{Q}{2\pi a} z\delta(z-z_0)\delta(\rho-a)\rho d\rho d\phi dz = Qz_0$$

das heißt wegen $z_0 = 0$ ist auch $m_z = 0$. Das Quadrupolmoment ist entsprechend

$$m_{zz} = \frac{1}{2}\int_K (3z^2 - r^2)\rho dQ = -\frac{1}{2}Qa^2 \ .$$

Für zwei Drahtringe setzt sich das Gesamtpotential additiv aus den Teilpotentialen der Einzelringe zusammen. Die Einzelpotentiale können übernommen werde,

$$\varphi_{Achse} = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+(z-\frac{d}{2})^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+(z+\frac{d}{2})^2}}\right) \ .$$

Mit den Abkürzungen $A = \sqrt{a^2+(z-\frac{d}{2})^2}$ und $B = \sqrt{a^2+(z+\frac{d}{2})^2}$ folgt

$$\varphi_{Achse} = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{A-B}{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{B^2-A^2}{AB(A+B)} = \frac{2z(Qd)}{4\pi\epsilon AB(A+B)}$$

für $d \to 0$ folgt

$$\varphi_{Achse} = \frac{mz}{4\pi\epsilon\sqrt{(a^2+z^2)^3}} \; .$$

Für die elektrische Feldstärke zweier Drahtringe folgt

$$\vec{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{e}_z = \frac{m(2z^2-a^2)\vec{e}_z}{4\pi\epsilon\sqrt{(a^2+z^2)^5}} \; .$$

Das Dipolmoment der doppel Drahtringe ist

$$m_z = \int\limits_{K_1} z\rho(\vec{r})dQ + \int\limits_{K_2} z\rho(\vec{r})dQ = Qd \; .$$

Das Quadupolmoment der doppel Drahtringe berägt

$$m_{zz} = \frac{1}{2}\int\limits_{K_1}(3z^2-r^2)\rho(\vec{r})dQ + \frac{1}{2}\int\limits_{K_2}(3z^2-r^2)\rho(\vec{r})dQ = 0 \; .$$

Aufgabe 2) Es existiert eine Rotationssymmetrie um die z-Achse. Deshalb wird das Potential φ in Zylinderkoordinaten z, ρ entwickelt.

$$\begin{aligned}\varphi(z,\rho) = \varphi(z_0,\rho_0) \;&+\; a_1(z-z_0) + a_2(\rho-\rho_0) + a_3(z-z_0)^2 + a_4(\rho-\rho_0)^2 \\ &+\; a_5(z-z_0)(\rho-\rho_0) + \ldots\end{aligned}$$

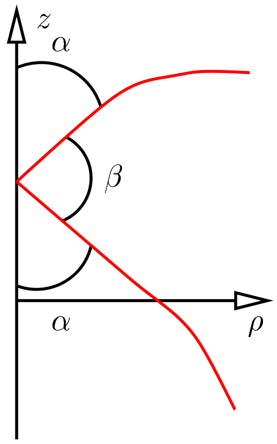
Im Punkt z_0, ρ_0 sei $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = 0$, also $a_1 = 0$ und $a_2 = 0$. Den Rest in die Potentialgleichung $\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = 0$ eingesetzt ergibt

$$0 = \Delta\varphi = 2a_3 + 2a_4 + 2a_4\frac{\rho-\rho_0}{\rho} + a_5\frac{z-z_0}{\rho} + \ldots \text{ höre Glieder} \tag{1}$$

a) Punkte auf der Achse haben $\frac{\rho-\rho_0}{\rho} = 1$. Außerdem folgt $a_5 = 0$, da sonst $\Delta\varphi$ für $z \neq z_o$ nicht endlich bleibt. Aus der Potentialgleichung erhält man $a_4 = -\frac{a_3}{2}$. Die Potentialentwicklung lautet daher

$$\varphi - \varphi(z_0, 0) = a_3(z-z_0)^2 - \frac{a_3}{2}\rho^2 \; .$$

Die Äquipotentiallinien bei $\varphi = \varphi(z_0, 0)$ erfüllen die Gleichung $\rho^2 = 2(z-z_0)^2$. Der Winkel $\tan\alpha = \frac{\rho}{z-z_0} = \sqrt{2}$ ergibt sich zu $\alpha = 54,75°$ bzw $\beta = 180° - 2\alpha = 70,5°$.



b) Außerhalb der Achse gilt nun $\rho_0 \neq 0$ und $a_5 \neq 0$ ist möglich. Desweiteren ist der konstante Anteil der Gl.(2) Null und daher

$$\rho = \rho_0 \ , \quad z = z_0 \ , \quad 0 = 2a_3 + 2a_4 \ , \quad a_4 = -a_3 \ .$$

Die Potentialentwicklung lautet also

$$\varphi - \varphi_0 = a_3(z-z_0)^2 - a_3(\rho-\rho_0)^2 + a_5(z-z_0)(\rho-\rho_0) \ .$$

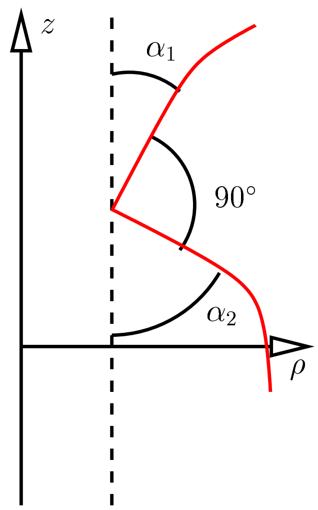
Die Bedingung für Äquipotentiallinien bei $\varphi = \varphi(z_0, \rho_0)$ ist erfüllt für

$$(\frac{\rho-\rho_0}{z-z_0})^2 - \frac{a_5}{a_3}\frac{\rho-\rho_0}{z-z_0} - 1 = 0 \ .$$

Die höheren Glieder tragen hierzu für $\rho \to \rho_0$ und $z \to z_0$ nichts mehr bei.

$$\frac{\rho-\rho_0}{z-z_0} = \frac{a_5}{2a_3} \pm \sqrt{\frac{a_5^2}{4a_3^2} + 1}$$

$$\tan\alpha_1 = \frac{a_5}{2a_3} + \sqrt{\frac{a_5^2}{4a_3^2} + 1} \text{ , und } \tan\alpha_2 = -\frac{a_5}{2a_3} + \sqrt{\frac{a_5^2}{4a_3^2} + 1}$$



Es gilt aber die Relation

$$\tan\alpha_1 \tan\alpha_2 = 1$$

wegen

$$\frac{1}{\tan(\alpha_1+\alpha_2)} = \frac{1-\tan\alpha_1\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1+\tan\alpha_2} = 0 \ .$$

Daher ist $\alpha_1 + \alpha_2 = 90°$.