Übungen zur theoretischen Elektrodynamik (Rose/Hoffstätter)

16.6.1998, Lösungen zu Übungsblatt Nr.7

**Aufgabe 1)** Das elektrische Potential der Anordnung ergibt sich

$$U = \frac{V}{\ln\frac{b}{a}} \ln\frac{\varrho}{a}$$

und damit das elektrische Feld zu $\vec{E} = -\nabla U = -\frac{1}{\varrho}\frac{V}{\ln\frac{b}{a}}\vec{e}_\varrho$. Für das Magnetfeld findet man $\vec{H} = \frac{I}{2\pi\varrho}\vec{e}_\varphi$.

a) Mit der Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(\varrho\vec{e}_\varrho + z\vec{e}_z) = \dot{\varrho}\vec{e}_\varrho + \varrho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$$

ergibt sich:

$$\vec{v} \times \vec{H} = \frac{I}{2\pi\varrho}(\dot{\varrho}\vec{e}_z - \dot{z}\vec{e}_\varrho).$$

Also folgt

$$\frac{d}{dt}(\gamma m\vec{v}) = \frac{d}{dt}(\gamma m\dot{\varrho})\vec{e}_\varrho + \frac{d}{dt}(\gamma m\varrho\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \frac{d}{dt}(m\dot{z})\vec{e}_z + m\dot{\varrho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi - m\varrho\dot{\varphi}^2\vec{e}_\varrho$$

, wobei $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$. Das ergibt die Bewegungsgleichungen ($e > 0$)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\gamma m\dot{\varrho}) &= m\varrho\dot{\varphi}^2 + eE_\varrho - e\mu\dot{z}H_\varphi,\\
\frac{d}{dt}(\gamma m\varrho\dot{\varphi}) &= -m\dot{\varrho}\dot{\varphi},\\
\frac{d}{dt}(\gamma m\dot{z}) &= e\mu\dot{\varrho}H_\varphi.
\end{aligned}$$

b) Ein Elektron, das mit $\vec{v}_0 = 0$ startet, wird zunächst vom $\vec{E}$-Feld radial beschleunigt und dann vom $\vec{B}$-Feld in z-Richtung abgelenkt. Die Geschwindigkeit bekommt jedoch keine $\varphi$-Komponente. Das ergibt sich auch aus der 2. Bewegungsgleichung

$$\gamma m\varrho\ddot{\varphi} = -2\gamma m\dot{\varrho}\dot{\varphi} - \gamma\dot{m}\varrho\dot{\varphi}.$$

Ist zu Beginn $\dot{\varphi} = 0$, so ist auch $\ddot{\varphi} = 0$. Damit ändert sich $\dot{\varphi}$ nicht, sondern bleibt 0, woraus sich $\varphi$= const. ergibt.

c) Die 3. Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \dot{z}) = e\frac{\mu I}{2\pi}\frac{\dot{\varrho}}{\varrho} = e\frac{\mu I}{2\pi}\frac{d}{dt}(\ln\varrho).$$

Dies läßt sich integrieren

$$\gamma m \dot{z} = e\frac{\mu I}{2\pi}\ln\varrho + const.$$

Die Integralkonstante ergibt sich aus der Bedingung $\dot{z}(a) = 0$

$$\gamma m \dot{z} = e\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{\varrho}{a} \qquad (1)$$

d) Der Energiesatz lautet $\gamma mc^2 + eU = mc^2$ da das Elektron bei $\varrho = a$ d.h. U=0 in Ruhe ist und dort deshalb die Ruhemasse $m$ hat. Allegemein gilt für $\dot{\varphi}$=0

$$m_0^2c^4 = m^2c^4\left(1 - \frac{\dot{z}^2}{c^2} - \frac{\dot{\varrho}^2}{c^2}\right) \qquad (2)$$

Aus (1) gewinnen wir $\frac{\dot{z}}{c} = e\frac{\mu I}{2\pi\gamma mc}\ln\frac{\varrho}{a}$. Eingesetzt in (2)

$$m^2c^4 = \left(m^2c^4 - 2eUmc^2 + e^2U^2\right)\left(1 - \frac{\dot{\varrho}^2}{c^2}\right) - \left(e\frac{\mu Ic}{2\pi}\ln\frac{\varrho}{a}\right)^2.$$

und aufgelöst nach $\frac{\dot{\varrho}^2}{c^2}$

$$\frac{\dot{\varrho}^2}{c^2} = \frac{e^2U^2 - 2eUm_0c^2 - (\frac{\mu ceI}{2\pi}\ln\frac{\varrho}{a})^2}{(m_0c^2 - eU)^2}.$$

Wenn die Elektronen die Anode nicht erreichen, so muß es einen Umkehrpunkt mit $\dot{\varrho} = 0$ geben. Dieser wird beim Radius $\varrho_0$ erreicht

$$0 = \frac{e^2V^2}{\ln^2\frac{b}{a}}\ln^2\frac{\varrho_0}{a} - \frac{2eV}{\ln\frac{b}{a}}m_0c^2\ln\frac{\varrho_0}{a} - e^2\frac{\mu^2c^2I^2}{4\pi^2}\ln^2\frac{\varrho_0}{a}.$$

Eine triviale Lösung ergibt sich natürlich bei $\varrho_0 = a$. Für die 2. Lösung folgt

$$0 = \frac{e^2V^2}{\ln^2\frac{b}{a}}\ln\frac{\varrho_0}{a} - \frac{2eV}{\ln\frac{b}{a}}m_0c^2 - e^2\frac{\mu^2c^2I^2}{4\pi^2}\ln^2\frac{\varrho_0}{a}.$$

Ferner muß $\varrho_0 < b$ sein, damit tatsächlich ein Umkehrpunkt existiert. Das kritische $V$, bei dem $\varrho_0$ gerade gleich $b$ wird, ergibt sich nach obiger Gleichung zu

$$V_{krit.} = \frac{m_0c^2}{e} + \sqrt{\frac{m_0^2c^4}{e^2} + \left(\frac{\mu cI}{2\pi}\ln\frac{b}{a}\right)^2}.$$

**Andere Lösungsmöglichkeit** Mit der hier vorliegenden Feldgeometrie kann man das $\vec{E}$- oder $\vec{H}$- Feld wegtransformieren, indem man in ein bewegtes Bezugssystem übergeht. Sei

$$\kappa = -\frac{2\pi\epsilon_0 V}{\ln\frac{b}{a}}$$

die Ladung pro Länge auf der Kathode. Ist $|\kappa| > |\frac{I}{c}|$, so läßt sich das Magnetfeld wegtransformieren, es bleibt nur noch das elektrische Feld übrig, und die Elektronen erreichen in jedem Fall die Anode.
Ist jedoch $|\kappa| < |\frac{I}{c}|$, so können wir das elektrische Feld wegtransformieren. Das neue Bezugssystem bewegt sich mit der Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \frac{\kappa c^2}{I}\vec{e_z}$$

und das Magnetfeld lautet $\vec{H'} = \vec{H}\sqrt{1-\frac{\kappa^2 c^2}{I^2}}$. Nun kann man die 3. Bewegungsgleichung integrieren und erhalten mit der neuen Anfangsbedingung $\vec{v_0} = -\tilde{\vec{v}}$

$$\dot{z} = \underbrace{\frac{e\mu I}{2\pi m}\sqrt{1-\frac{\kappa^2c^2}{I^2}}}_{K}\, ln\frac{\varrho}{a} - \tilde{v}.$$

Da das Magnetfeld keine Arbeit leistet, reduziert sich der Energiesatz auf $m = const.$, bzw. $1-\frac{\dot{z}^2+\dot{\varrho}^2}{c^2} = 1-\frac{\tilde{v}^2}{c^2} = 1-\frac{\kappa^2c^2}{I^2}$ oder $\dot{\varrho}^2 = \tilde{v}^2-\dot{z}^2$ Die Bedingung $\dot{\varrho}=0$ führt ($K$ s.o.) damit auf $K$
$ln\frac{\varrho_0}{a} = 2\tilde{v}$ Für den kritischen Fall $\varrho_0 = b$ können wir hieraus $\kappa_{krit.} = -\frac{2\pi\epsilon_0 V_{krit.}}{\ln\frac{b}{a}}$ bestimmen

$$\frac{\kappa^2c^2}{I^2} - 1 + 2\frac{\kappa c^2}{I}\frac{2\pi m_0}{\ln\frac{\varrho_0}{a}e\mu I} = 0$$

$$\rightarrow \kappa_{krit.} = -\frac{2\pi m_0}{e\mu\ln\frac{b}{a}} - \sqrt{\left(\frac{2\pi m_0}{e\mu\ln\frac{b}{a}}\right)^2 + \frac{I^2}{c^2}}.$$

Damit erhält man wie zuvor

$$\boxed{V_{krit.} = \frac{m_0c^2}{e} + \sqrt{\left(\frac{m_0c^2}{e}\right)^2 + \left(\frac{\mu Ic\ln\frac{b}{a}}{2\pi}\right)^2}}$$

Für die meisten praktischen Fälle ($I < 500A$, $\frac{b}{a} < 1000$) ist die nichtrelativistische Näherung

$$V_{krit.} = \frac{|e|}{2m_0c^2}\left(\frac{\mu Icln\frac{b}{a}}{2\pi}\right)^2$$

ausreichend.