Übungen zur theoretischen Elektrodynamik (Rose/Hoffstätter)

23.6.1998, Lösungen zu dem Übungsblatt Nr. 8

Aufgabe 1)

a) Für die Kapazität eines Plattenkondensators gilt: $C = \frac{\epsilon_0 F}{x+d}$. Die in diesem Kondensator gespeicherte Energie ist

$$W_{el} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\epsilon_0 F}(x+d) \quad .$$

Dabei wurde das Vorzeichen so gewählt, daß die gespeicherte Energie zunimmt, wenn x größer wird. Ist die Ladung auf den Kondensatorplatten konstant, dann gilt

$$K_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\epsilon_0 F} \; .$$

. Einsetzen dieser Beziehungen führt auf die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -\lambda x - \frac{Q^2}{2\epsilon_0 F} \; .$$

Im Gleichgewicht ($\ddot{x} = 0$) erhält man für den Plattenabstand $x_0 = -\frac{1}{2\lambda\epsilon_0 F}Q^2$. Um die Stabilität für kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage zu überprüfen, wählt man folgenden Ansatz:

$$m\ddot{x} = m(\ddot{x_0} + \ddot{\xi}) = m\ddot{\xi} = -\lambda(x_0 + \xi) - \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\epsilon_0 F} = -\lambda\xi \quad .$$

Die Lösung ist eine Schwingungsgleichung - die Gleichgewichtslage ist also stabil!

b) Bleibt die Spannung konstant, so gilt für die im Kondensator gespeicherte Energie

$$W_{el} = -\frac{1}{2}\epsilon_0 F U^2 \frac{1}{x+d}$$

Für die auf die Kondensatorplatte ausgeübte Kraft gilt in diesem Fall

$$K_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{1}{2}\epsilon_0 F U^2 \frac{1}{(x+d)^2} \quad .$$

Die resultierende Bewegungsgleichung lautet $m\ddot{x} = -\lambda x - \frac{1}{2}\epsilon_0 F U^2 \frac{1}{(x+d)^2}$. Im Gleichgewicht ist $-x_0(x_0+d)^2 = \frac{\epsilon_0 F}{2\lambda}U^2$. Im Gleichgewicht muß demnach x_0 negativ sein. Für $x_0 \in [-d, 0]$ hat $-x_0(x_0+d)^2$ ein Maximum bei

$x_0 = -\frac{d}{3}$. Dort ist $-x_0(x_0+d)^2 = \frac{4}{27}d^2$ und $U = U_1 = \sqrt{(\frac{2\lambda}{\epsilon_0 F}\frac{4}{27}d^3)}$. Für $U > U_1$ gibt es daher keinen Gleichgewichtszustand. Für $U < U_1$ gibt es zwei Gleichgewichtszustände, deren Stabilität nun untersucht werden soll. Hat die Gesamtenergie W_{ges} ein Minimum, so ist die Bewegung stabil.

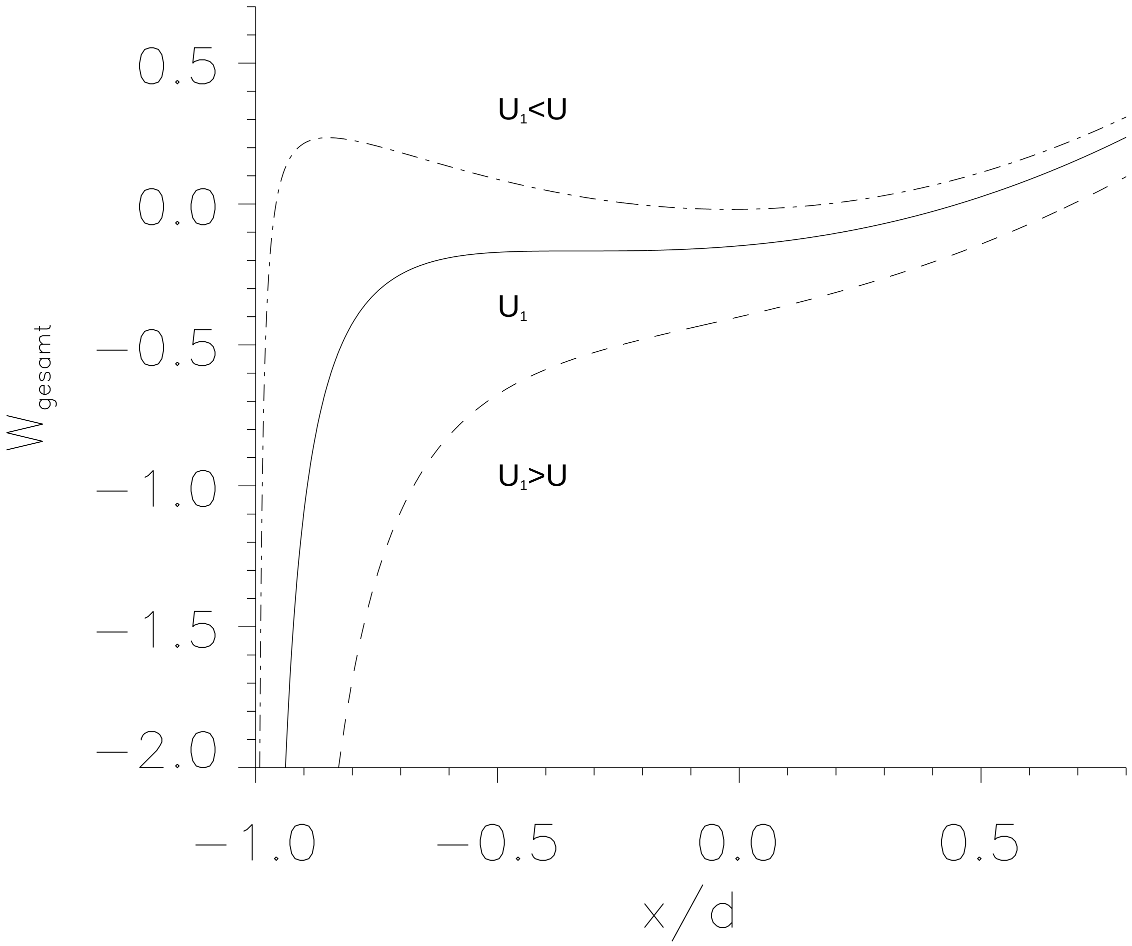
$$\begin{aligned} W_{ges}(x_0) &= W_{el} + W_{Feder} = -\frac{1}{2}\epsilon_0 F U^2 \frac{1}{x_0+d} + \frac{1}{2}\lambda x_0^2 \ , \\ \frac{\partial W}{\partial x}(x_0) &= \frac{1}{2}\epsilon_0 F U^2 \frac{1}{(x_0+d)^2} + \lambda x_0 \ , \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x_0) = -\epsilon_0 F U^2 \frac{1}{(x_0+d)^3} + \lambda \ . \end{aligned}$$

Setzt man an dieser Stelle U^2 ein, dann läßt sich die letzte Gleichung schreiben als

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x_0) = \frac{2\lambda x_0}{x_0+d} + \lambda = \frac{\lambda}{x_0+d}(3x_0+d)$$

Für den Fall $U < U_1$, bei dem zwei Gleichgewichtslagen auftreten, ergeben sich zwei Möglichkeiten

$$\text{stabil}: \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} > 0 \text{ bei } x_0 > -\frac{d}{3} \ , \quad \text{labil}: \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} < 0 \text{ bei } x_0 < -\frac{d}{3} \ .$$



Aufgabe 2) Zu Lösen ist die Laplacegleichung in zwei Dimensionen. Aufgrund der vorliegenden Symmetrie werden kartesische Koordinaten gewählt,

$$\Delta\varphi = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})\varphi = 0 \quad .$$

Hilfreich erscheint ein Separationsansatz $\varphi(x,y) = \sum_n \varphi_n(x,y)$, wobei für jeden Anteil $\Delta\varphi_n = 0$ erfüllt sein muß und sich jedes φ_n schreiben läßt als $\varphi_n(x,y) = f_n(x)g_n(y)$. Einsetzen in die Laplacegleichung ergibt $\frac{1}{f_n}\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + \frac{1}{g_n}\frac{\partial^2 g_n}{\partial y^2} = 0$. Beide Terme müssen unabhängig voneinander konstant sein, daher

$$\frac{1}{f_n}\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} = \alpha_n^2 = -\frac{1}{g_n}\frac{\partial^2 g_n}{\partial y^2} \quad .$$

Diese Gleichungen werden mit den gängigen Lösungsansätzen gelöst,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= a_n e^{\alpha_n x} + b_n e^{-\alpha_n x} \; , \\ g_n(y) &= c_n \cos\alpha_n y + d_n \sin\alpha_n y \; . \end{aligned}$$

Die Randbedingungen lauten:

$$\begin{aligned} \varphi(x=0,y) = 0 &\Rightarrow b_n = -a_n \quad , \\ \varphi(x,y=0) = 0 &\Rightarrow c_n = 0 \quad , \\ \varphi(x,y=y_0) = 0 &\Rightarrow \alpha_n = \frac{n\pi}{y_0}, \quad n \in \mathrm{N} \quad . \end{aligned}$$

Unter Verwendung dieser Randbedingungen erhält man als Zwischenergebnis

$$\varphi(x,y) = \sum_n c_n \sin(\frac{n\pi}{y_0}y)\sinh(\frac{n\pi}{y_0}x) \quad .$$

Die Verwendung der Randbedingung $\varphi_0 = \varphi(x = x_0, y)$ ergibt

$$\varphi_0(x,y) = \sum_n c_n \sin(\frac{n\pi}{y_0}y)\sinh(\frac{n\pi}{y_0}x_0) \stackrel{!}{=} \sin(\frac{\pi}{y_0}y)$$

Um die c_n 's zu berechnen, verwendet man die Orthogonalitätsrelation der trigonometrischen Funktionen

$$\frac{2}{y_0}\int_0^{y_0} \sin(\frac{m\pi}{y_0}y)\sin(\frac{l\pi}{y_0}y)dy = \delta_{ml} \quad .$$

Mit $< f(y)|g(y) >= \frac{2}{y_0}\int_0^{y_0} f(y)g(y)dy$ kann dies geschrieben werden als

$$< \sin(\frac{m\pi}{y_0}y)|\sin(\frac{l\pi}{y_0}y) >= \delta_{ml} \quad .$$

Um die Koeffizienten zu bestimmen, löst man das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} < \varphi(x_0, y) | \sin(\frac{m\pi}{y_0} y) > &= \sum_n c_n \sinh(\frac{n\pi}{y_0} x_0) < \sin(\frac{n\pi}{y_0} y) | \sin(\frac{m\pi}{y_0} y) > \\ &= c_m \sinh(\frac{m\pi}{y_0} x_0) =< \sin(\frac{\pi}{y_0} y) | \sin(\frac{m\pi}{y_0} y) >= \delta_{1m} \quad . \end{aligned}$$

Die Lösung lautet daher

$$\varphi(x, y) = \frac{\sinh(\frac{\pi}{y_0} x)}{\sinh(\frac{\pi}{y_0} x_0)} \sin(\frac{\pi}{y_0} y) \quad .$$